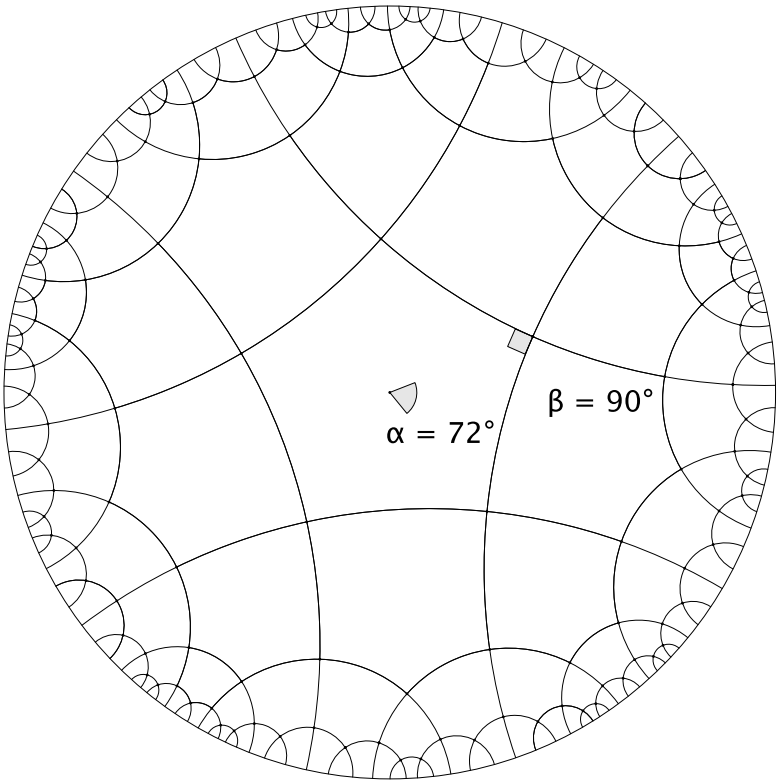
La Géométrie Hyperbolique



Travail de maturité

Antoine Imhoff

Janvier 2014

Lycée Blaise-Cendrars

Mentor : Niel Smith
Lycee Blaise Cendrars
La Chaux-de-Fonds

ne.ch
RÉPUBLIQUE ET CANTON DE NEUCHÂTEL

Avant-Propos

Le présent document part de l'envie que j'avais d'étudier des aspects géométriques originaux. J'ai tout d'abord voulu m'intéresser à la géométrie de la sphère ; j'ai toujours adoré la géographie : je me serais intéressé à l'aspect géométrique de la dérive des continents. Cependant, après plusieurs recherches, je suis tombé sur une conférence à propos de la géométrie hyperbolique "Promenade non Euclidienne" [1]. Lorsque j'ai vu à quel point la géométrie hyperbolique était riche et intéressante, j'ai voulu d'avantage me concentrer dessus ; cela m'a fasciné. Au point où j'ai voulu inventer le Go hyperbolique. Malheureusement, je n'ai pas pris le temps de le développer. Je me suis donc concentré sur le développement axiomatique qui mène à la géométrie hyperbolique.
Maintenant, je vous laisse vous promener à travers l'ensemble des résultats surprenants des géométries euclidiennes et non-euclidiennes. En espérant que cela vous plaise...

1. [Bou05]

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 Problématique 5
1.2 L'utilisation de LaTeX 6
1.3 GeoGebra 6

2 La Géométrie Euclidienne **7**
2.1 La méthode axiomatique 7
2.2 Définitions 8
2.3 Les 5 Postulats d'Euclide 10
2.4 Le Postulat des Parallèles : complexité problèmatique 13

3 La Géométrie Hyperbolique **18**
3.1 Résultats principaux 18
3.1.1 Parallélisme limite : Base de la géométrie hyperbolique 18
3.1.2 Preuve de l'homogénéité de la somme des angles des triangles 19
3.1.3 Congruence de tous les triangles semblables 24
3.2 Le Cercle de Poincaré 25
3.2.1 Le modèle de Poincaré 26
3.2.2 Concordance du modèle du cercle avec les quatre premiers postulats 27
3.2.3 Concordance du modèle de Poincaré avec les résultats axiomatiques de Lobachevsky 30
3.3 Pavages Hyperboliques 34
3.3.1 La symétrie dans le cercle de Poincaré : l'inversion 34
3.3.2 Construction de pavages 36

4 Une souris dans un cercle de Poincaré **38**
4.1 ...Ça se complique... 38

5 Conclusion **42**
5.1 Si nous allions plus loin. 42
5.2 Enrichissements promulgués par cette aventure 42

A Annexe A : la première **46**

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mon mentor Niel Smith, pour sa patience et ses encouragements. Je remercie aussi mes parents, pour la discipline qu'ils ont tenté de mettre en place pour moi.
D'autres personnes m'ont aussi considérablement aidé, de façon moins directe, mais tout aussi importantes :

- Merci à la rédaction de Science & vie Junior qui m'a éveillé à de nombreux sujets scientifiques, ainsi qu'à la géométrie non-euclidienne.
- Merci à Christophe Bolle, mon professeur de mathématiques, qui m'a aiguillé sur ce sujet.
- Merci à mon camarade, Deni Gahlinger, et à nos nombreuses discussions géométriques.
- Je remercie également Emmanuel Joos, pour son modèle LaTeX_ intuitif et facile d'utilisation (sauf pour la bibliographie ;)).
- Je remercie finalement les loutres, les ratons laveurs, les éléphants roses, les limaces, les souris et les autres animaux formidables qui peuplent toutes listes stupidement longues.

Remerciements également à tout ceux que j'ai oubliés, qui ont probablement contribué de façon remarquable à ce document.

1 Introduction

La géométrie est un domaine bien plus vaste que l'on pense en général. La plupart des gens pense qu'elle s'arrête aux petits dessins que l'on fait en secondaire, au calcul de trigonométrie avec plein (trop) de décimales. À la limite, le profane pensera peut-être à inclure les sphères, cylindres, et autres solides de Platon.
Cependant elle est bien plus riche que cela. Dans ce document, nous en explorerons si peu. La géométrie peut devenir des mathématiques très formelles et algébriques si on l'étudie *analytiquement*. On peut étudier les courbes, les nœuds, les figures étranges de la topologie, tel que les sphères cornues ou le ruban de Moebius. Il est aussi possible de visiter les espaces de dimensions supérieures, si on veux par exemple étudier la géométrie du temps, ou même de la musique.
La géométrie ne ressemble pas toujours à notre espace quotidien. Il n'y a pas forcément besoin de partir dans les tréfonds de l'imaginaire d'un mathématicien pour découvrir des choses surprenantes. Étudiez les formes spirales des fougères et de la coquille des mollusques, étudiez la forme étrange de coraux ou des fjords de Norvège. Pour des propriétés encore plus surprenantes, prenez votre aéroplane, partez de Kinshasa au Congo, allez droit vers le nord sans vous arrêtez. Arrivés au pôle, bifurquez de nonante degrés et revenez à l'équateur, quelque part en Amérique du Sud, et tournez encore une fois de nonante degrés. Allez tout droit, vous revenez à Kinshasa. Qu'avez-vous remarqué ? Que cela vous a couté cher en kérosène ? Non ! Vous venez de construire un triangle avec trois angles droits. Impossible me direz-vous, un triangle a toujours une somme d'angles de 180 degrés, jamais 270°. Bienvenue en géométrie non-euclidienne.

1.1 Problématique

Ce que nous venons de faire dans la section précédente est de la géométrie de la sphère. Cependant nous ne pouvons pas nous concentrer dessus. Il y a trop peu de chose à dire.
C'est pourquoi nous allons nous concentrer sur la géométrie dite hyperbolique, un monde encore plus étrange. Mon but principal en faisant cela est de tenter de remonter dans la création d'un environnement géométrique axiomatique partant des postulats d'Euclide pour remonter jusqu'aux figures merveilleuses que sont les pavages hyperboliques.
J'aurais pu évidement m'intéresser aux géométries non-euclidiennes dans leur globalité, m'intéresser d'avantage aux rotations sur la sphère et détailler moins les résultats théoriques de la géométrie hyperbolique. Comme j'étais parti à la base pour créer un jeu de Go hyperbolique, le cheminement que j'avais mis en place menait droit à la construction des pavages

du cercle de Poincaré. Il me paraissait difficile de justifier la présence d'un long chapitre sur la géométrie sphérique et elliptique.
Le présent document s'intéresse à la généralisation d'une géométrie *axiomatique* vers la géométrie déroutante qu'est la géométrie hyperbolique. Nous nous attarderons donc à passer en détail la géométrie euclidienne avant de nous jeter sur la géométrie hyperbolique.
Je pense que la géométrie hyperbolique est suffisamment simple, pour que même des personnes ayant peu ou prou de connaissance géométrique puisse facilement comprendre les bases. Ils pourront assez facilement utilisé les notions qu'ils auront saisies dans les grandes lignes pour pouvoir se situer dans un espace de géométrie hyperbolique.

1.2 L'utilisation de LaTeX

Un autre objectif de ce document était d'apprendre à utiliser LaTeX.
LaTeX_ permet une construction très formelle et beaucoup plus adaptée aux travaux scientifiques. Il s'agit d'un environnement de traitement de texte très différent des "wysiwyg" (*what you see is what you get*, ce que tu vois est ce que tu obtiens) classiques tel que Word, Openoffice ou Pages. Lorsqu'on tape sur LaTeX, on ne tape pas directement le résultat final, on tape un code que l'ordinateur interprète et compile en image PDF. Des commandes sont là pour créer des sections, changer le style du texte (gras, italique, petites capitales...), créer automatiquement un sommaire ou une bibliographie.
LaTeX_ est particulièrement bien adapté aux travaux de longue envergure, alors que le wysiwyg est adapté plutôt aux documents courts ou graphiquement designés.

1.3 GeoGebra

Tout les dessins géométriques de ce document ont été réalisés par mes soins avec le logiciel *Geogebra* [1]. C'est un programme de dessin géométrique qui mêle une forme de "wysiwyg" avec un peu de programmation. Les figures ont été importées en PDF. Il aurait été trop complexe de les intégrer en *feuilles dynamiques*, leurs lignes de commandes auraient trop déformé les figures du cercle de Poincaré.
Les dessins hyperboliques ont été réalisés grâce à des outils personnalisés [2] qui me permettaient d'aller beaucoup plus vite dans leur réalisation.

1. [Hoh13] Programme similaire : *CABRI*
2. [PM08] Livre sur le logiciel CABRI, mais le Macros sur CABRI peuvent être utilisées sur GeoGebra

2 La Géométrie Euclidienne

La géométrie [1] est très ancienne ; le fait de "mesurer la terre" existe depuis la construction des premières villes. Babyloniens, Sumériens, Égyptiens... toutes ces civilisations avaient déjà des connaissances géométriques. Mais leurs méthodes étaient généralement assez analogiques et empiriques : elles consistaient en une série de règles et d'habitudes que les géomètres adaptaient selon les situations. La géométrie était une affaire d'architectes et de bureaucrates. À partir du dernier millénaire avant Jésus Christ, les Grecs commencèrent à réfléchir à propos d'un système : Thalès (philosophe) développa au VIème siècle la première géométrie logique.
Euclide (philosophe de la Grèce antique) n'est probablement pas l'initiateur de sa géométrie axiomatique. Cependant il semblerait qu'il soit celui qui a le plus contribué à sa diffusion et qui l'a définitivement fixée. Il est notamment parvenu à plus de 465 démonstrations originales grâce à son système.
Euclide dans ses *Éléments* [2] fit l'achèvement de compiler le travail de ses prédécesseurs. C'est l'une des plus grandes œuvres humaines de tout les temps. Il a posé les bases de toute la géométrie et des mathématiques : la méthode axiomatique est la base et la première pierre des mathématiques pures.

2.1 La méthode axiomatique

La méthode axiomatique permet [3] de prouver sans expérience un raisonnement mathématique. Il faut pour cela baser son raisonnement sur des axiomes déjà acceptés par le lecteur, puis lui montrer comment notre nouvel axiome les suit logiquement. Il existe pour l'axiome S_n que l'on veut démontrer, un axiome S_{n-1} qui le démontre. Si on suit cette logique, il existe donc des postulats S_0 qui doivent être acceptés à la base. Un axiome de ce type pourrait être par exemple $1 + 1 = 2$, il est facile de l'accepter. Le dernier point important requis pour construire un raisonnement axiomatique est d'être d'accord de quoi on parle. Si on reprend $1+1 = 2$, on doit se mettre d'accord que 1 et 2 sont des nombres, que + est le signe de l'ajout, de l'addition, et = le signe de l'équivalence, de l'égalité. Autrement dit $1 + 1 = 2$ signifie : *un objet et un autre objet font deux objets*.

1. [Gre72], page 5
2. pièce maitresse des mathématiques antiques
3. [Gre72], page 8

Les Préparatifs

Préparatif 0
Définitions précises des mots et des symboles qui doivent être mutuellement acceptés.
Préparatif 1
Acceptation de certains postulats simples, sans preuve ni justification.
Préparatif 2
Création de règles de raisonnements qui permettent de passer d'un axiome à un autre

2.2 Définitions

Notre chemin vers la géométrie hyperbolique doit passer par la pleine compréhension de la géométrie euclidienne que l'on apprend à l'école. Procédons ainsi à la révision de sa construction axiomatique. Le zéroième préparatif consiste à définir les concepts de bases de la géométrie : points, droites, angles... Ces objets sont tellement simples que nous n'allons pas vraiment les définir, mais les dessiner. En effet, Euclide donne des définitions pour les droites, points, angles.
Par exemple :
Un point est ce qui n'a pas de parties
ou
Une droite est une ligne également placée entre ces points
Ces définitions sont intéressantes mais ne sont pas vraiment utiles et beaucoup trop abstraites.

Les éléments de base de la géométrie euclidiennes

- point
- droite
- angle
- intersection
- congruence

Sur la figure 2.1, nous avons les droites m et l, elles se coupent en P, l passe par Q, l'angle α congrue à l'angle β

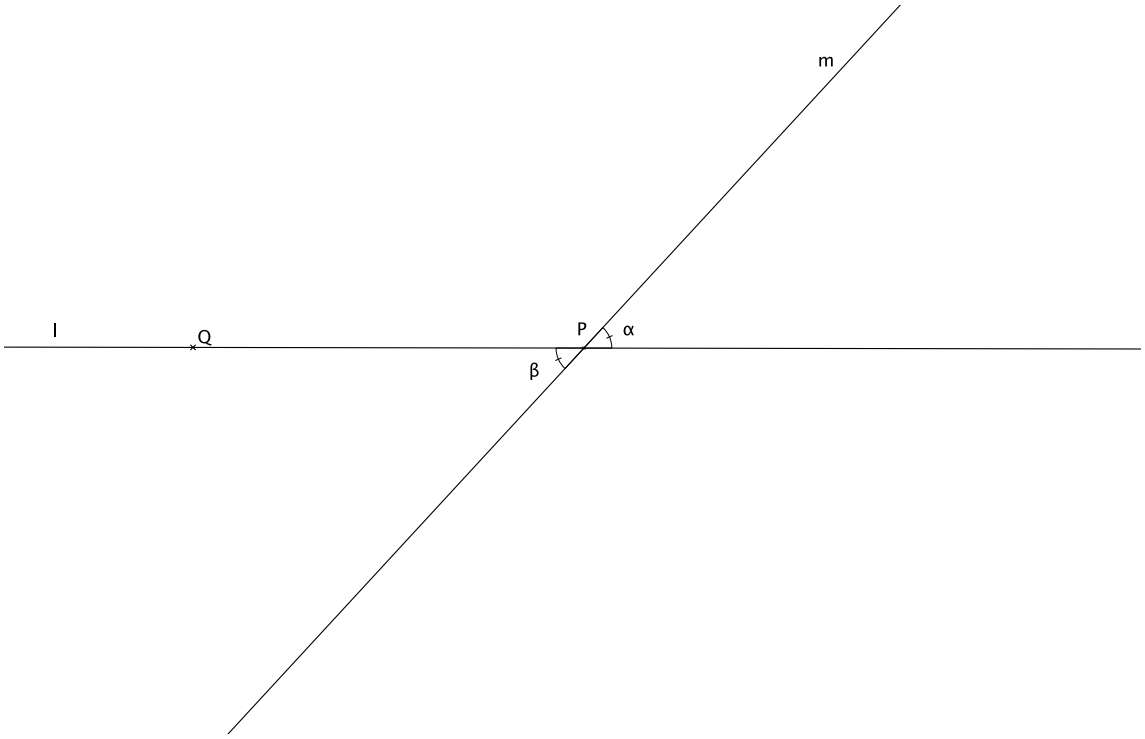


Figure 2.1 – Définitions

2.3 Les 5 Postulats d'Euclide

Voici les quatre premiers postulats d'Euclide [4] , nous parlerons plus longuement du cinquième.

Premier Postulat, postulat de la droit unique

Par deux points passe une et une seule droite

Figure 2.2 – Représentation d'une droite

Ce postulat est le plus basique de tous. Il peut aussi s'exprimer par *"Le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite"* ou par *"Une droite peut être définie par deux points par lesquelles elle passe"*. On peut ainsi définir une droite qui passe par A et B comme la droite AB. La section de la droite entre A et B est le segment AB.

Second Postulat, postulat du prolongement

Tous segments peuvent être prolongés en une droite

On peut aussi le formuler par *"Un segment peut être rallongé par un autre dans la continuité de la droite qu'il définit"*. En des termes plus techniques [5] ce postulat nous dit que, pour tous segments AB et CD, il existe un unique point E, qui encadre B avec A, qui crée un segment BE congruent au segment CD.
Ce postulat permet de préparer [6] le troisième (figure 2.4) : En donnant le segment OA, l'ensemble des points P qui forment un segment OP congruent à OA forme un cercle OA, de centre O et dont les segments OP sont les rayons.

4. [Gre72] page 12
5. [Gre72] page 13
6. [Gre72] page 14

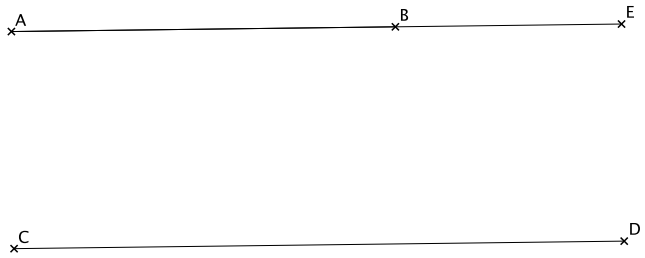


Figure 2.3 – Rallongement du segment AB par E

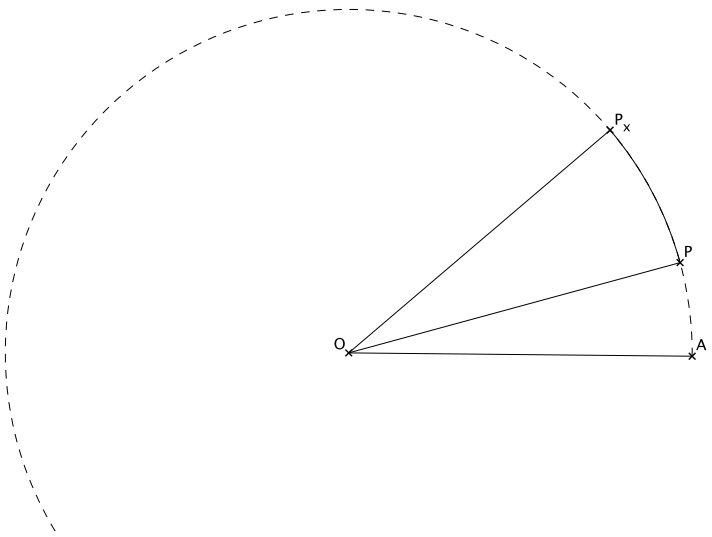


Figure 2.4 – Création du cercle OA

Troisième Postulat, postulat du cercle unique

Deux points distincts définissent un seul cercle qui passe par un des points et dont l'autre est le centre

Ce postulat a le même rapport au second que le premier. Le second nous décrit une solution pour "construire" le cercle ou la droite, alors que le troisième, de la même façon que le premier décrit les droites, nous décrit minimalement les cercles. Le postulat du cercle implique aussi que pour tous points O extérieurs à une droite, et A sur cette droite, il n'y a qu'un point P sur cette droite qui forme un segment OP congruent à OA (le second point d'intersection du cercle OA (fig.2.5)). Il est aussi connu que si pour ce point A, le point P n'est pas distinct, le cercle OA est *tangent* à la droite. Enfin la droite OA est *perpendiculaire* à la droite sur laquelle est situé A ; selon le premier postulat : cette perpendiculaire est unique (fig.2.6).

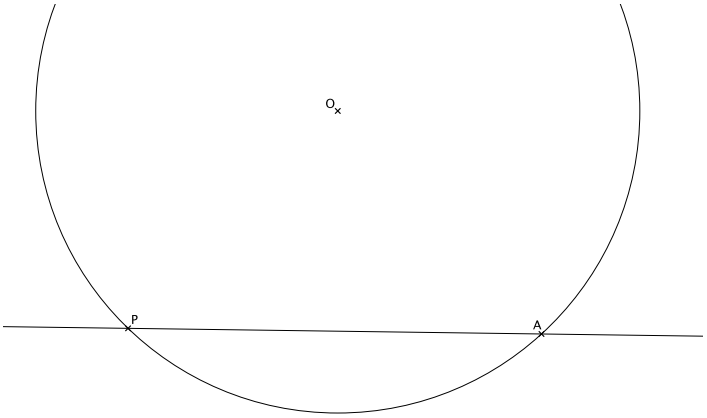


Figure 2.5 – Cercle coupant une droite

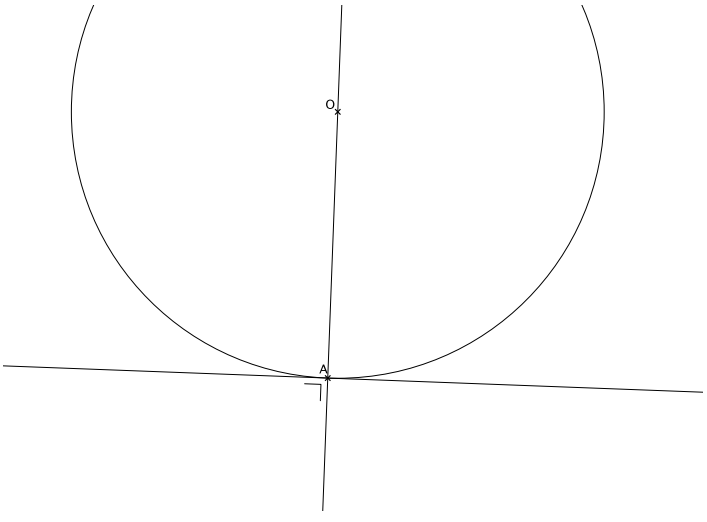


Figure 2.6 – Cercle tangent à une droite

Quatrième Postulat, postulat des angles droits congruents

Tous les angles droits sont congruents entre eux

Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux paires d'angles congruents. Si ces droites sont perpendiculaires, comme décrit dans la section précédente, les angles formés sont tous égaux et forment des angles droits.
Ce postulat est très intuitif : Presque tout le monde a de la facilité à réfléchir avec des angles droits : en vertical , en horizontal ; en debout, en couché ; les angles des maisons, les points cardinaux, les systèmes de cordonnées ; tout ces très nombreux aspects simples de la vie quotidienne se basent sur ce quatrième postulat et sur son prolongement dans la troisième dimension. Rappelons ainsi que la raison d'être de ces postulats sont de construire un système sur des bases solides ; c'est ainsi que nous sommes obligés de passer par cette trivialité pour accepter le quatrième postulat.
L'évidence est donc le point commun des quatre premiers postulats. L'ultime va par-contre nous préoccuper d'avantage :

Cinquième Postulat, postulat des parallèles

Par un point extérieur à une droite passe une seule droite parallèle à cette droite

À l'origine ce postulat était formulé de la façon suivante : *"Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits"* (c'est équivalent de dire que la somme des angles des triangles est égal à deux droits)
Ce dernier postulat vous semble –je suppose– parfaitement logique à vous qui avez depuis votre enfance été habitués à la géométrie euclidienne. En effet, les parallèles sont comme les lignes d'un papier ligné ou quadrillé : elle sont parallèles les unes aux autres, traversée elles-mêmes par des perpendiculaires, elles-mêmes parallèles. Pourtant c'est un acte de foi que d'imaginer que deux droites infinies, dès que la somme des angles intérieurs de ses deux droites est à peine inférieure à deux droits, se croisent. Ce postulat nous mène droit dans l'idée d'infini. Il ne collabore pas avec les autres et n'est absolument pas intuitif, tout le contraire de ce que devrait être un postulat.

2.4 Le Postulat des Parallèles : complexité problèmatique

Le fait que le Cinquième Postulat ne soit point intuitif va remuer les mathématiciens. Pendant deux mille ans, ils essaieront de le supposer superflu, de le prouver par les 4 premiers ou de le remplacer par un autre. Le supposé superflu vous bloque dans l'étude des parallèles et même des triangles, vu que ce postulat est équivalent au théorème de la somme des angles d'un triangle. Le remplacer nous amène toujours vers un équivalent et tenter de le prouver nous amène toujours vers une supposition injustifiable.
Cette constatation va toujours déranger. À l'époque de la naissance des mathématiques modernes, plusieurs mathématiciens vont tenter de prouver que la somme des angles d'un triangle n'est ni inférieure, ni supérieure à deux droits. Nous reverrons plus tard la preuve

de la non-supériorité. Giovanni Saccheri [7], puis Johann-Heinrich Lambert [8] tentent infructueusement de prouver le postulat. Adrien-Marie Legendre [9] échoue à nouveau. Voici sa tentative :

Tentative de preuve de l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle, par Adrien-Marie Legendre

Legendre, ayant déjà prouvé la non-supériorité à deux droits, en aimerait prouver l'égalité [10].
Pour cela prenons [11] un triangle ABC, et posons que la somme de ses angles est égale à :

$$\Sigma_{ABC} = \pi - p \qquad (p \in [0;\infty[)$$

si $p > 0$ alors la somme des angles d'un triangle peut être inférieure à deux droits, sinon, vu qu'il a déjà prouvé l'impossibilité de la supériorité à deux droits, on a forcément $p = 0$ donc la somme équivaut à deux droits.
À partir de ABC, créons le triangle ACD congruent à ABC. Selon le second postulat, allongeons les segments BA et BC en demi-droites ; plaçons le point F sur $\overrightarrow{BA}$ qui encadre A avec B $(B * A * F)$; traçons la droite FD : $\overleftrightarrow{FD}$ coupe $\overrightarrow{BC}$ en E.
Appelons le triangle ABC, a ; ACD, b ;CDE, c et ADF, d. Les angles en B, F, E sont appelés respectivement β, ζ et ε. Les angles multiples en A, C, D sont nommés α, γ et δ avec respectivement les affixes $\square_{a,b,c,d}$, selon auxquels des triangles a, b, c, d ils sont affiliés (fig. 2.7).

7. Mathématicien Italien (1667-1733)
8. Mathématicien Allemand (1728-1777)
9. Mathématicien français (1752-1833)
10. [Voe05]
11. [Bro96]

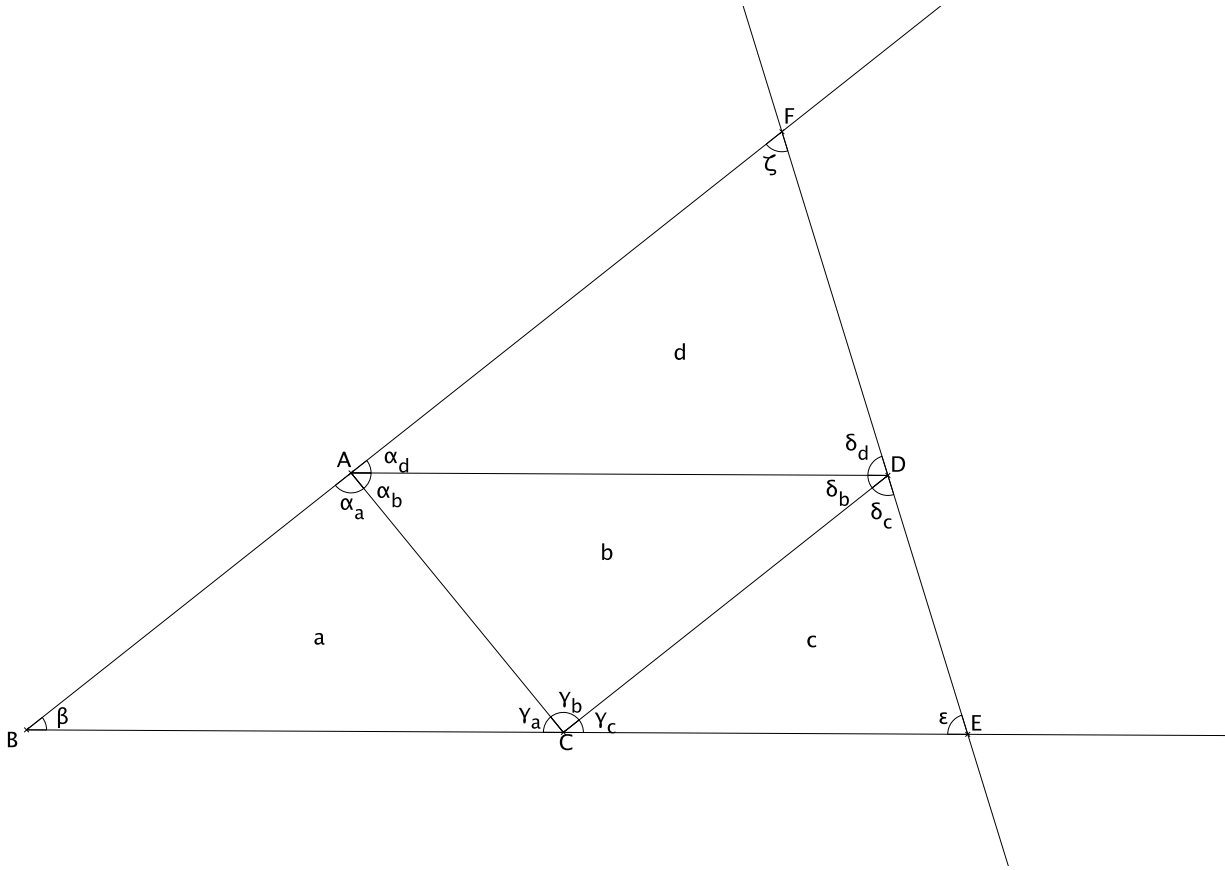


Figure 2.7 – Figure utilisée par la preuve

Cherchons la somme des angles du triangle BEF : La somme des angles de a équivaut à $\Sigma_a = \pi - p$; le triangle b est congruent à a, donc sa somme est aussi $\pi - p$.
Pour ce qui est de la somme des angles de c et de d, supposons que leur somme est égale à π. En additionnant la somme de tout ces triangle nous obtenons l'équation :

$$\Sigma_a + \Sigma_b + \Sigma_c + \Sigma_d = \pi - p + \pi - p + \pi + \pi = 4\pi - 2p \tag{2.1}$$

En remplaçant dans 2.1, les sommes par les angles qui les composent, on obtient :

$$\alpha_a + \beta + \gamma_a + \alpha_b + \gamma_b + \delta_b + \gamma_c + \delta_c + \varepsilon + \alpha_d + \delta_d + \zeta = 4\pi - 2p \tag{2.2}$$

selon 2.2, en regroupant les angles liés à un même point :

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c + \delta_b + \delta_c + \delta_d + \beta + \varepsilon + \zeta = 4\pi - 2p \tag{2.3}$$

Vu que ces angles α_{abc}, γ_{abc} et δ_{bcd} forment un angle plat ($= \pi$) et que la somme $\beta + \varepsilon + \zeta$ correspond aux angles du triangle BEF, nous pouvont réécrire l'équation :

$$\pi + \pi + \pi + \Sigma_{BEF} = 3\pi + \Sigma_{BEF} = 4\pi - 2p \Longrightarrow \Sigma_{BEF} = \pi - 2p \tag{2.4}$$

La somme des angles de BEF est plus petite que la somme des angles de ABC ; on peut recommencer la construction qui nous a amenés de ABC à BEF pour construire un triangle BE_1F_1 dons la somme des angles serait égale à $/pi - 4p$. On peut déduire la relation suivante, avec n, entier égal au nombre de fois que l'on a répété la construction :

$$\Sigma_{BE_nF_n} = \pi - p2^{n-1} \tag{2.5}$$

Si p est plus grand que 0 alors la somme $\Sigma_{BE_nF_n}$ (2.5) va forcément devenir plus petite que 0. Les angles négatifs étant impossibles, Legendre va conclure que $p = 0$ et donc que la somme des triangles ne peut être que égale à deux droits.

□?

Incomplétude de la preuve de Legendre

Le problème de la preuve de Legendre est qu'elle prouve le cinquième postulat par lui-même. En effet, lorsque l'on tire la droite $\overleftrightarrow{FD}$, qu'est-ce qui nous prouve qu'elle coupe la droite $\overleftrightarrow{BC}$? Cette tentative utilise le postulat pour prouver le postulat lui-même. Cet exemple représente bien la plupart des tentatives du même ordre. On parvenait toujours à la même conclusion, mais toujours en passant par une hypothèse équivalente au cinquième postulat. Le serpent se mord la queue ...

⧄!

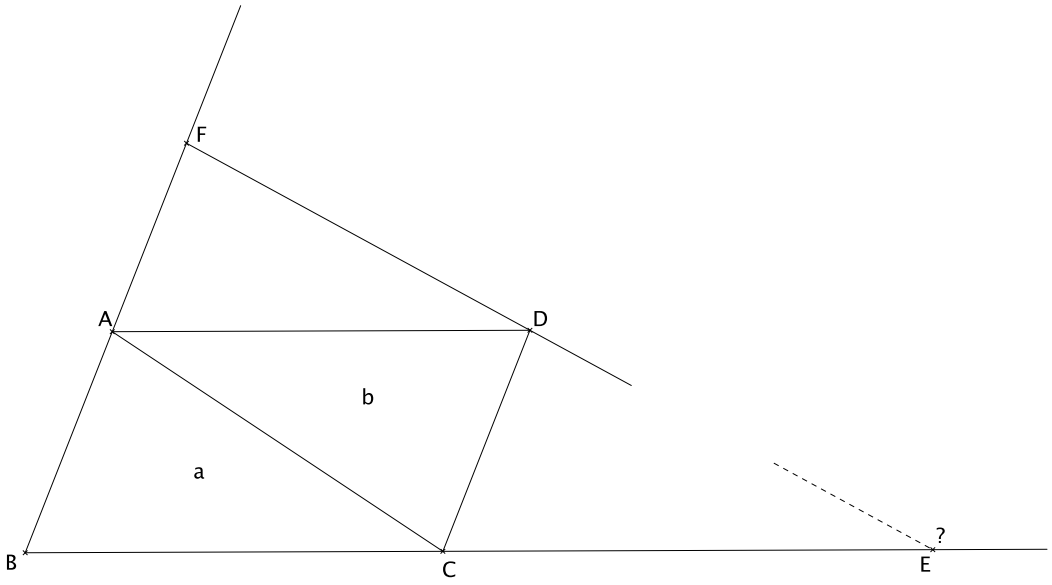


Figure 2.8 – E existe-t-il ? Prouve que tu existes ! Dans ce monde égoïste !

Les tentatives de preuve de Legendre, un premier pas vers la géométrie non-euclidienne

Les découvertes de Legendre sont intéressantes. Dans ses tentatives infructueuses, comme Lobachevsky plus tard [12], il prouve [13] l'homogénéité de la somme des triangles. Ce résultat est très important : il mène directement à se poser la question de la possibilité de créer des triangles à la somme des angles inférieure à deux droits. Malheureusement Legendre ne se *laissera pas aller* à la construction d'une théorie à ce propos que ces travaux permettaient pourtant de déduire.
D'autres mathématiciens, dont le grand Gauss (1777-1855), conjectureront et même déduiront des résultats de géométrie hyperbolique. Cependant seul Lobachevsky publiera sa théorie. Mais, sans Gauss, qui dans sa correspondance va vivement faire l'éloge du mathématicien russe, tout le monde aurait oublié ses travaux. Personne au début du XIX^e siècle ne s'intéressait et trouvait possible la création d'une nouvelle géométrie : le grand Euclide était trop profondément encré dans les mémoires, comme nombre de philosophes et savants grecs. Si les sciences physiques se sont enfin débarrassées d'Aristote avec Newton, les mathématiques, qui semblaient être plus logiques et fondamentales, ont dû attendre la fin du XIX^e siècle pour accepter des idées nouvelles comme une géométrie non-euclidienne.

12. Voir section "résultat principaux" dans le chapitre "La Géométrie Non Euclidienne"
13. [Voe05]

3 La Géométrie Hyperbolique

Nous venons d'observer que malgré la complexité du cinquième postulat, il était improuvable par les précedents. Pendant longtemps les mathématiciens ont continué à chercher. Jusqu'au XIXe siècle, on partait du principe que malgré tout ça, il fallait le prendre tel quel sans se poser de questions. Néanmoins, vers 1830, le mathématicien russe Lobachevsky parvint [1] à des résultats intéressants en considérant le postulat des parallèles comme faux, ou plutôt comme incomplet. C'est le début de la géométrie non-euclidienne.
En effet, Lobachevsky se base sur les résultats de Legendre, cités dans la section sur le cinquième postulat : on peut seulement prouver la somme des angles d'un triangle si on les considère inférieurs à deux droits. Partant de ça, on arrive à toute sortes de résultats intéressants. Dans un univers hyperbolique, il est possible de construire un pentagone régulier rectangle, mais impossible de construire un carré. Il est aussi impossible de construire des triangles semblables de tailles différentes : leurs angles sont inhérents à leurs mesures. Dans la géométrie hyperbolique, il est aussi possible de paver le plan avec une infinité de polygones réguliers : il est ainsi même possible de remplir le plan avec des hectogones (100 côtés).
Il est difficile de dire si cette géométrie existe ou non. Dans la vie réelle, vous ne pouvez que constater qu'il est impossible de paver avec des hectogones... Cependant qui nous dit qu'à des échelles cosmiques, l'univers ne courbe pas de façon à ce que des triangles de milliard d'année-lumières de côté ne puissent pas être ramenés l'un sur l'autre par homothétie, ou qu'il soit possible de le paver avec des dodécaèdres, contenant chacun des trillions de galaxies...
La géométrie hyperbolique est extrêmement riche ; nous n'aurons qu'à peine le temps de la survoler. Je vous laisse être fascinés, ou peut-être effrayés par cette *géométrie astrale* [2].

3.1 Résultats principaux

3.1.1 Parallélisme limite : Base de la géométrie hyperbolique

Considérons maintenant un univers dans lequel il est possible de construire plusieurs droites parallèles à une autre, mais qui se coupent en un même point. Qu'est-ce que cela implique ?

1. [Voe05]
2. [Gau00], selon la correspondance de Gauss un certain *Schweikardt* de Marbourg, aurait appelé la géométrie hyperbolique ainsi

Pour cela, construisons [3] la droite BC et sa perpendiculaire AB. Par A, menons la parallèle AD, perpendiculaire à AB et D se situant du même coté de AB que C.
S'il existe plusieurs droites parallèles à BC, il existe parmi la famille de droites AN, avec N situé dans l'espace entre le segment AB et les droites AD et BC, des droites $AN_{\parallel}$ qui sont parallèles à BC tout comme AD. Évidement, toutes les droites AN ne sont pas parallèles à BC ; il est forcément possible de construire un triangle ABF, F étant le point d'intersection des droites $AN_{\nparallel}$ avec la droite BC.

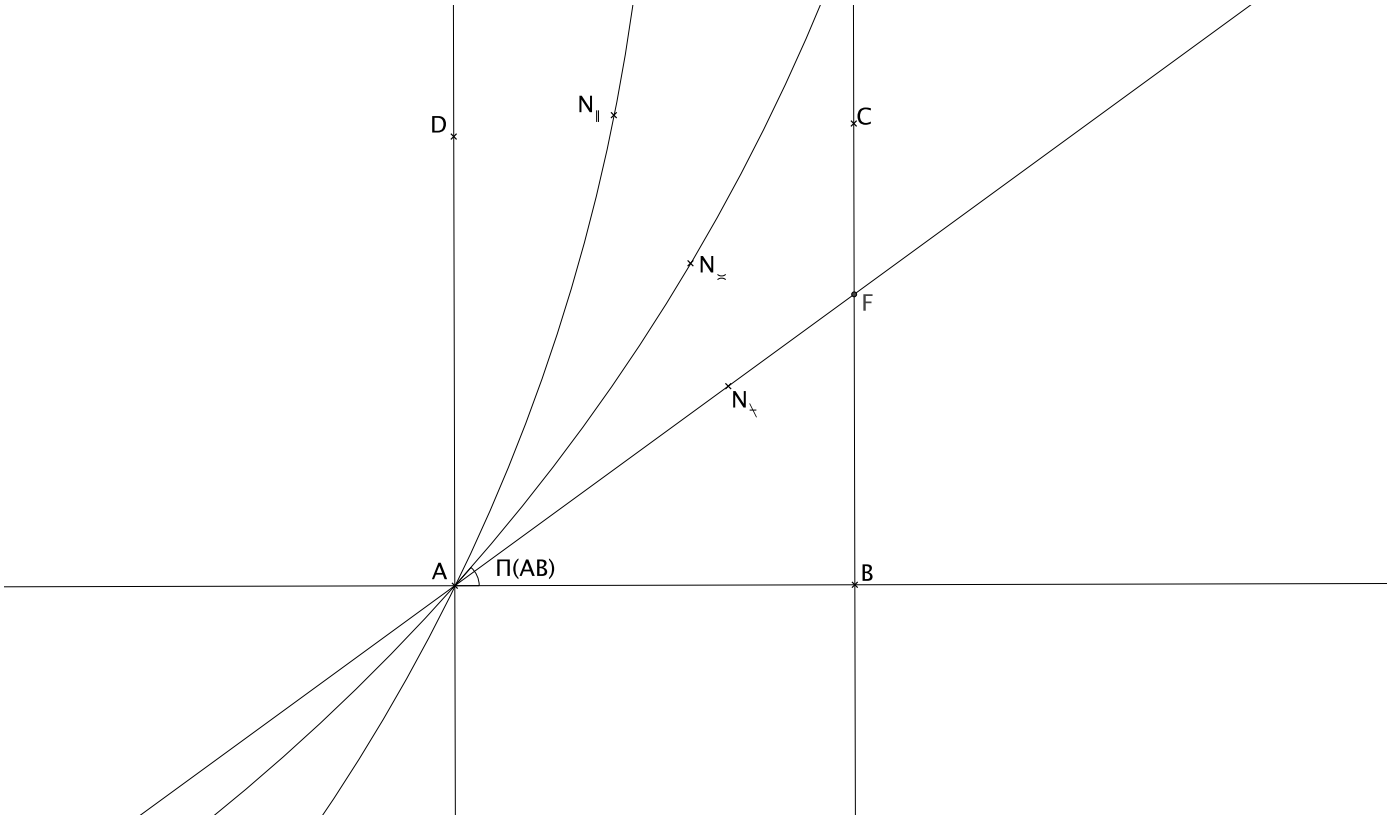


Figure 3.1 – Figure représentant le parallélisme limite

Lorsque l'on abaisse AN, il y a forcément un moment ou la droite finit par couper BC, que l'on passe de la sous-famille $AN_{\parallel}$ à la sous-famille $AN_{\nparallel}$. Il existe donc un angle $\widehat{NAB}$, sur lequel la droite $AN_{\asymp}$ est à la limite de croiser BC. Cette droite va asymptotiquement se rapprocher de BC. L'angle $\widehat{NAB}$ est appelé angle de parallélisme limite, il dépend de la distance AB. Si celle-ci diminue, c'est à dire que les droites AD et BC s'approchent, l'angle limite $\widehat{NAB}$, que l'on va appeler $\Pi(AB)$, va tendre vers $\frac{\pi}{2}$. À l'inverse, il va tendre vers zéro.

3.1.2 Preuve de l'homogénéité de la somme des angles des triangles

Un des résultats principaux de Lobachevsky [4] est que, si on considère la possibilité de construire des triangles dont la somme des angles sera strictement inférieure à deux droits,

3. [Lob00], développement 16
4. [Lob00], développement 20

alors il est impossible de construire des triangles dont la somme des angles est égale à deux droits. Ainsi la géométrie hyperbolique et la géométrie euclidienne sont incompatibles.

Preuve, introduction

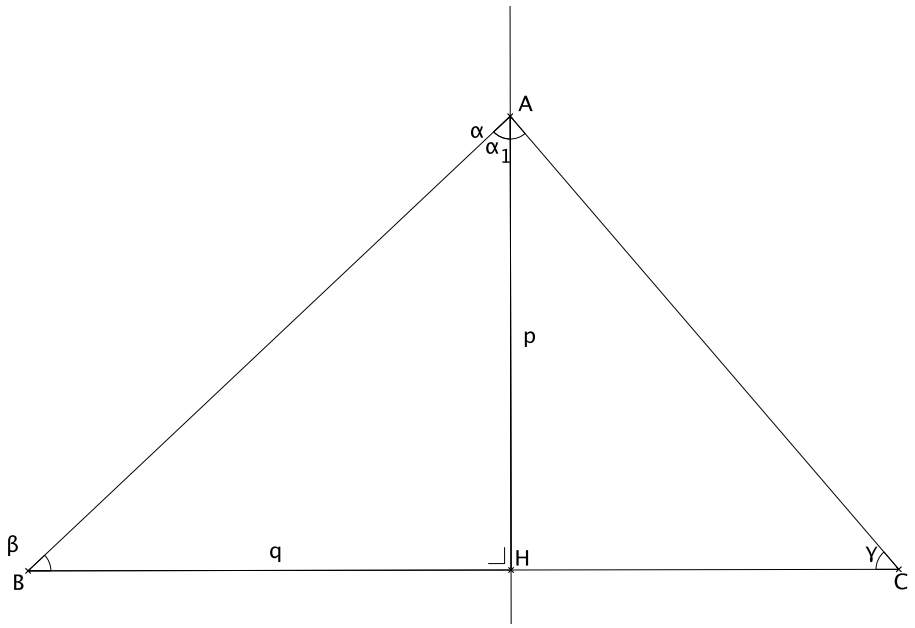


Figure 3.2 – Triangle sur lequel nous allons travailler

Commençons par supposer l'existence d'un triangle ABC dont la somme des angles est égale à π. Supposons que l'angle α en A est obtus ou droit, donc les autres angles β et γ sont forcément aigus, preuve ci-dessous :

Preuve de l'existence d'un seul angle obtus

La somme des angles du triangle peut s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{3.1}$$

Écrivons l'équation 3.1 sous la forme :

$$\frac{\pi}{2} + A + \frac{\pi}{2} + B + \frac{\pi}{2} + C = \pi \Longrightarrow A + B + C = -\frac{\pi}{2} \tag{3.2}$$

Où A, B, C sont des nombres contenus dans les intervalles :

$$A \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\tag{3.3}$$

$$B \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\tag{3.4}$$

$$C \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\tag{3.5}$$

Considérons que l'angle α est obtus ou droit ; l'intervalle 3.3 devient :

$$A \in [0; \frac{\pi}{2}[\tag{3.6}$$

A peut être remplacer par :

$$A = \frac{\pi}{2} - A_1 \qquad A_1 \in]0; \frac{\pi}{2}] \tag{3.7}$$

Si on place se résultat dans 3.2 on obtient :

$$\frac{\pi}{2} - A_1 + B + C = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow B + C = -\pi + A_1 \tag{3.8}$$

Supposons maintenant que β est lui aussi obtus ou droit. L'intervalle 3.4 devient $B \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et donc on peut poser :

$$B = \frac{\pi}{2} - B_1 \qquad B_1 \in]0; \frac{\pi}{2}] \tag{3.9}$$

comme pour A. Donc remplaçons ce résultat dans 3.8 :

$$\frac{\pi}{2} - B_1 + C = -\pi + A_1 \Longrightarrow C = -\frac{3\pi}{2} + A_1 + B_1 \tag{3.10}$$

Si on réécrit tout cela avec des unions d'intervales cela donne :

$$C \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cap \left[[-\frac{3\pi}{2}] \uplus]0; \frac{\pi}{2}] \uplus]0; \frac{\pi}{2}] \right] \Longrightarrow C \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cap]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}] \Longrightarrow C \in \emptyset \tag{3.11}$$

Si on recommence cette opération en supposant cette fois que B est contenu dans $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ alors on trouvera que C l'est aussi et donc, qu'il ne peut y avoir plus d'un angle obtus.

□

Preuve de l'homogénéité de tous les triangles contenus dans un triangle

De l'angle α en A (fig. 3.2), seul angle obtus, faisons tomber la hauteur p. Elle est perpendiculaire à CB en H ; les triangles ACH et ABH sont rectangles en H. Prouvons que la somme des angles de chacun des deux triangles est aussi égale à π : pour cela posons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi & a) \\ \frac{\pi}{2} + \beta + \alpha_1 = \pi + A & b) \\ \frac{\pi}{2} + \gamma + \alpha - \alpha_1 = \pi + B & c) \end{cases} \tag{3.12}$$

L'équation a) correspnd à la somme des angles du triangle ABC, l'équation b), à celle du triangle ABH et l'équation c), à celle du triangle ACH. Si les valeurs A ou B dépassent 0, alors les triangles respectifs auront une somme d'angles supérieure à π ce qui est impossible selon la preuve précédente. Si A ou B sont inférieurs à 0, alors le triangle respectif aura une somme d'angles inférieure à π. Nous voulons prouver avec l'équation a), que les triangles qui composent le triangle ABC ont aussi une somme d'angles égale à π.
Commençons par additionner les équations b) et c) :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= \pi & a) \\ \frac{\pi}{2}+\beta+\alpha_1 &= \pi+A & b) \\ \frac{\pi}{2}+\gamma+\alpha-\alpha_1 &= \pi+B & c) \\ \pi+\alpha+\beta+\gamma &= 2\pi+A+B & b)+c) \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= \pi & a) \\ \frac{\pi}{2}+\beta+\alpha_1 &= \pi+A & b) \\ \frac{\pi}{2}+\gamma+\alpha-\alpha_1 &= \pi+B & c) \\ 0 &= A+B & b)+c) \end{cases} \tag{3.14}$$

Donc d'après la simplification 3.14, si A est toujours l'inverse de B : soit ils sont tout deux égaux à zéro, soit l'un est négatif et l'autre positif. Cela implique donc que si un des deux triangles a une somme de ses angles plus petite que π alors l'autre aura une somme plus grande, ce qui est impossible. Les valeurs A et B sont donc forcément nulles et tout triangles émanant de la division d'un triangle dont la somme des angles est π, aura forcément lui aussi une somme de π.

□

Preuve de la constructibilité de tous les triangles à partir du triangle *ABH*

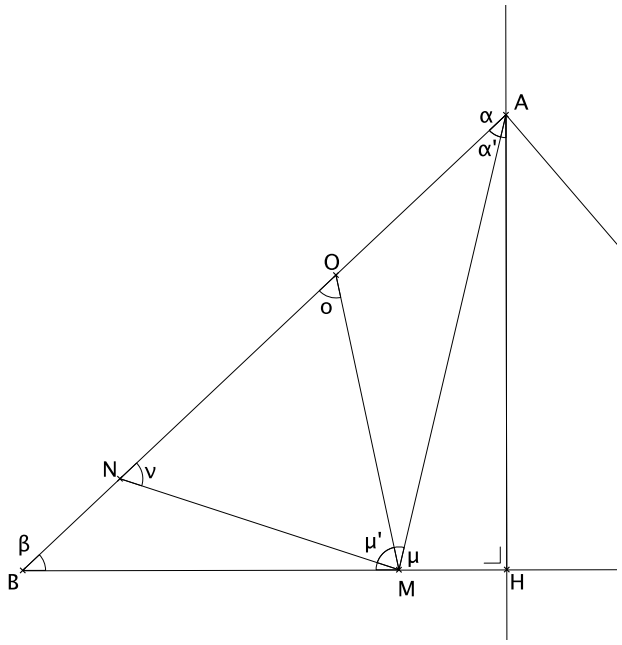


Figure 3.3 – Triangle *ABH*

Reprenons le triangle *ABC* de l'introduction, divisé entre *ABH* et *ACH* (fig. 3.2). Dans le triangle *ABH*, il y a les angles fixes, en *A*, α et en *B*, β.
Dans le triangle *ABH* (fig. 3.3), plaçons la famille de points *M* sur le segment *BH*, la famille *N* sur *BA* et la famille *O*, aussi sur le segment *BA* mais de façon à ce que *O* soit toujours entre *A* et *N*.

Les points M génèrent avec A et B, la famille de triangles ABM. Ses angles sont β en B, la famille d'angles μ en M qui varient dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2};\pi-\beta[$ et la famille d'angles α' contenus dans l'intervalle $]0;\alpha]$.
À partir des points M, N et O, on construit la famille de triangles MNO. Dans ce triangle il y a les angles μ', ν et o qui sont contenus dans les intervalles (3.15, 3.16, 3.17) suivants :

$$\mu' \in]0;\pi-\beta[\tag{3.15}$$

$$\nu \in [\beta;\pi-\alpha[\tag{3.16}$$

$$o \in]0;\pi-\beta[\tag{3.17}$$

Ces intervalles contiennent déjà beaucoup d'angles, Il faut maintenant prouver que l'on peut modifier l'angle β. Pour cela construisons le quadrilatère $AH'BH$, H' étant construit en rapportant la hauteur p sur B. Ce quadrilatère est un rectangle : les deux triangles étant rectangles et leurs sommes d'angles étant π, les angles α et β additionnés forment des angles droits.

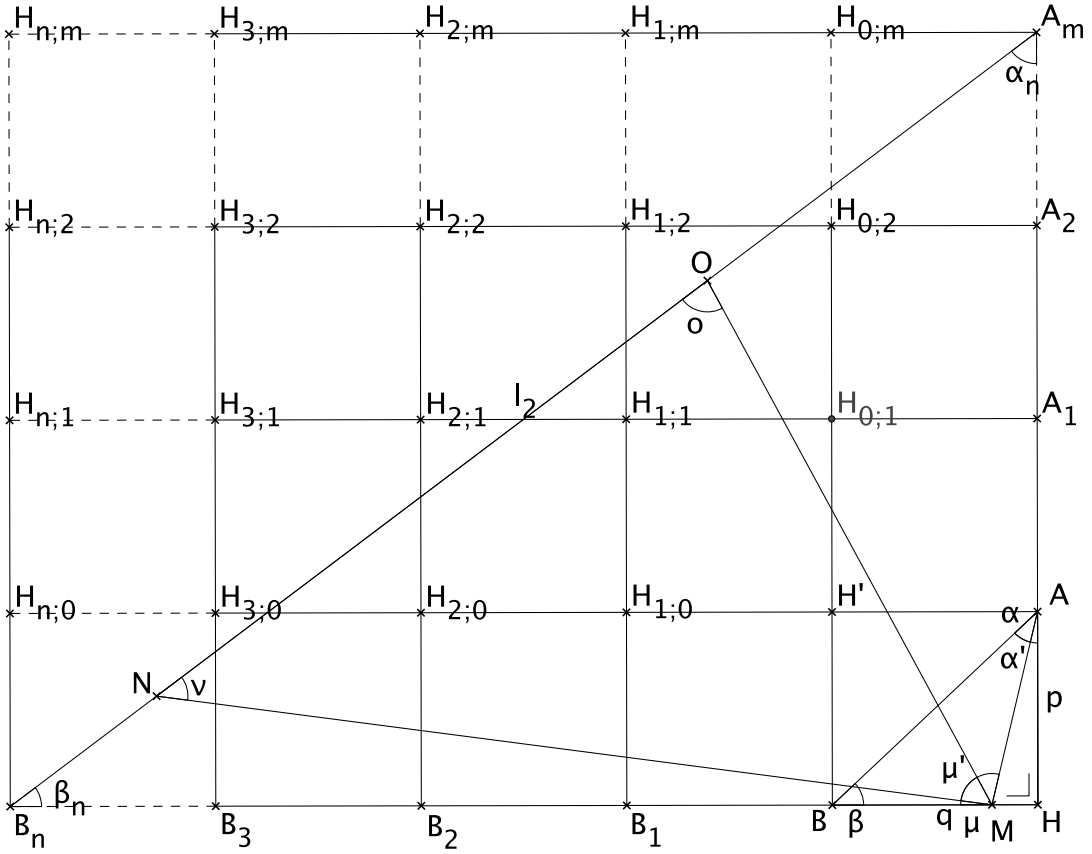


FIGURE 3.4 – Rectangle $A_m H_{n;m} B_n H$

Ce rectangle est de longueur BH que l'on va appeler q et de hauteur AH, que l'on a appelée "hauteur p". Soit les entiers n et m ; en répétant ce rectangle n fois dans la direction

$\overrightarrow{HB}$, on construit la famille de rectangles AH_nB_nH. En répétant ce dernier rectangle m fois dans la direction $\overrightarrow{HA}$ on construit la famille de rectangles $A_mH_{n;m}B_nH$ de hauteur mp et de longueur nq.
Ces rectangles, si ils sont partagés par la diagonale A_mB_n, forment les deux famille de triangles rectangles A_mB_nH et $A_mB_nH_{n;m}$. Sur ces triangles, on peut faire la construction équivalente à celle déjà faite sur le triangle ABH. Ils deviennent donc notre nouveau triangle $(ABH)_{n;m}$ à l'intérieur du quel nous avons à nouveau le triangle MNO.
Dans le triangle $(ABH)_{n;m}$, lorsque n tend vers l'infini et que m reste fixe, β tend vers 0. Lorsque au contraire, c'est m qui tend vers l'infini et que n reste fixe, α tend vers 0 et donc β vers $\frac{\pi}{2}$. On peut donc créer l'intervalle :

$$\beta \in]0;\frac{\pi}{2}[\tag{3.18}$$

Si on insère cet intervalle dans les intervalles 3.15—3.17, et en sachant que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ on obtient :

$$\mu' \in]0;\pi-\beta[\Longrightarrow \mu' \in]0;\pi - min\left(]0;\frac{\pi}{2}[\right)[\Longrightarrow \mu' \in]0;\pi[\tag{3.19}$$

$$\nu \in [\beta;\pi-(\frac{\pi}{2}-\beta)[\Longrightarrow \nu \in [\beta;\frac{\pi}{2}+\beta[\Longrightarrow \nu \in [min\left(]0;\frac{\pi}{2}[\right);\frac{\pi}{2}+max\left(]0;\frac{\pi}{2}[\right)[\Longrightarrow \nu \in]0;\pi[\tag{3.20}$$

$$o \in]0;\pi-\beta[\Longrightarrow o \in]0;\pi - min\left(]0;\frac{\pi}{2}[\right)[\Longrightarrow o \in]0;\pi[\tag{3.21}$$

Les angles μ', ν et o correspondent donc bien à tous les angles possibles. En agrandissant indéfiniment le triangle, on pourra forcément créer à l'intérieur tous les triangles possibles en tout points. Nous pouvons bien conclure que si UN triangle a une somme d'angles de π alors TOUT les triangles ont une somme d'angles égale.

□

Conclusion : incompatibilité des Géométries

Lobachevsky prouve de façon similaire [5] que, si le cinquième postulat est vrai, alors il est toujours vrai. On le prouve en démontrant l'existence de rectangles lorsque le *postulatum* est vrai ; selon la preuve que nous venons d'achever, l'existence de rectangles implique que la somme des angles des triangles soit égale à π. Tout ceci nous amène à la conclusion suivante : la géométrie hyperbolique est incompatible avec la géométrie euclidienne. Dans le sens que, soit il est possible de mener en un point plusieurs droites parallèles à une autre, soit il n'est possible d'en mener qu'une seule.

3.1.3 Congruence de tous les triangles semblables

En nous basant sur ce que nous venons de démontrer, nous pouvons par exemple prouver que d'autres éléments de la géométrie euclidienne ne sont plus vraiment valables en géométrie hyperbolique. Par exemple, nous pouvons prouver [6] que tous les triangles semblables dans la géométrie hyperbolique sont congruents.

5. [Lob00]
6. [Gre72] page 154

Pour cela, commençons par supposer qu'il existe des triangles semblables mais non congruents. Dans ce cas, il existe deux triangles ABC et $A'B'C'$, qui ont les même angles α en A et A' et même chose pour les angles β et γ. Il est donc possible, en posant que le triangle ABC est le plus grand triangle, de construire sur les segments AB et AC les points B'' et C'' de façon à ce que le triangle $AB''C''$ soit congruent à $A'B'C'$. Les angles autour des points C'' et B'' ont une somme de π. Les angles à l'intérieur du quadrilatère $B''BCC''$ en B'' et C'' sont donc respectivement égaux à $\pi-\beta$ et $\pi-\gamma$. En additionnant les angles du quadrilatère, nous obtenons :

$$\pi-\beta+\beta+\pi-\gamma+\gamma=\pi+\pi=2\pi \tag{3.22}$$

C'est-à-dire que si, on divise le quadrilatère en deux, on obtient deux triangles dont la somme des angles est égale à π. Selon le théorème précédemment démontré, nous sommes dans un cas de géométrie euclidienne. En géométrie hyperbolique il est donc impossible de construire des triangles homothétiques.

□

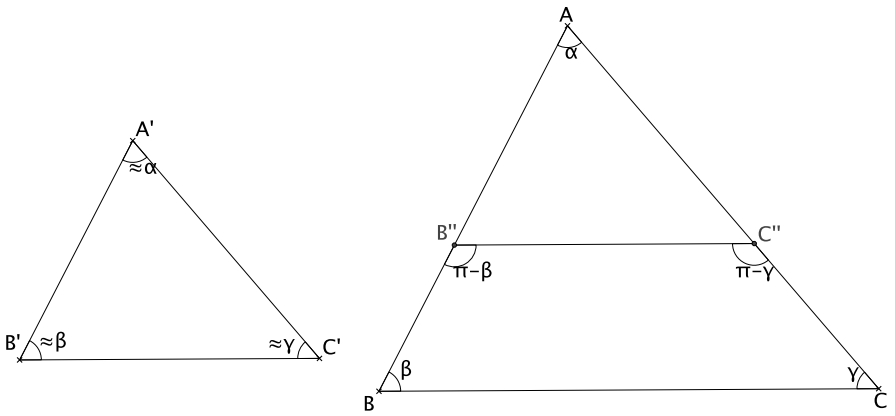


Figure 3.5 – Triangles semblables, le quadrilatère $B''BCC''$ a une somme de 2π

3.2 Le Cercle de Poincaré

Il est intéressant de construire une géométrie uniquement en se basant sur des raisonnements ; c'est ce que l'on a fait jusqu'ici avec la géométrie hyperbolique de Lobachevsky. Mais à quoi ressemble-t-elle vraiment ? La première chose qu'on peut imaginer est de dessiner des courbes et des droites sur une hyperbole de révolution d'où le nom de *géométrie hyperbolique*. Cependant ce n'est pas très pratique pour réfléchir sur du papier. On peut étudier la géométrie hyperbolique sur un modèle en projection qui déforme tout : distance, forme, angles … Voilà pourquoi il a fallu inventer des modèles qui sont conformes au moins à l'une de ces trois caractéristiques.

3.2.1 Le modèle de Poincaré

Henri Poincaré (1854-1812) est une des grandes figures des mathématiques de la seconde moitié du XIXème siècle et du début du XXème. Connu notamment pour sa fameuse conjecture, Poincaré est le fondateur de la topologie algébrique, branche hautement complexe de la géométrie moderne.
Le cercle de Poincaré en lui-même est connu depuis plusieurs années, mais c'est Poincaré qui va faire le rapprochement avec la géométrie de Lobachevsky. En quoi consiste-t-il ? Il s'agit d'un cercle (évidemment) qui représente l'univers de géométrie hyperbolique. Sa limite n'en est pas vraiment une, il s'agit en vérité de tout les points portés sur l'infini. Le Cercle ou Disque de Poincaré est donc une représentation, dans un espace fini, d'un espace infini.

Le cercle de Poincaré, les éléments de base

Comme en géométrie euclidienne, nous nous devons de placer quelques définitions. Dans le cercle de Poincaré [7], sera considéré comme points, tous points situés strictement à l'intérieur du cercle. Les point sur le cercle-limite sont des *points limites* portés sur l'infini. Les points à l'extérieur du cercle sont des points projetés, qui ne nous servirons qu'à prouver certains postulats à l'intérieur du cercle. Les droites sont représentées par des arcs de cercles orthogonaux au cercle-limite : c'est à dire que leurs tangentes aux points limites (au points où elles coupent le cercle limite) seront perpendiculaires aux tangentes du cercle limite aux mêmes points ; lorsqu'une droite passe par le centre du cercle-limite, elle est représentée par un diamètre de celui-ci. Les angles entre deux segments de droites sont calculés selon l'angle entre les tangentes au point d'intersection.
Voici une représentation à l'intérieur du cercle de Poincaré des même objets que sur la figure 2.1.

7. [Bou05]

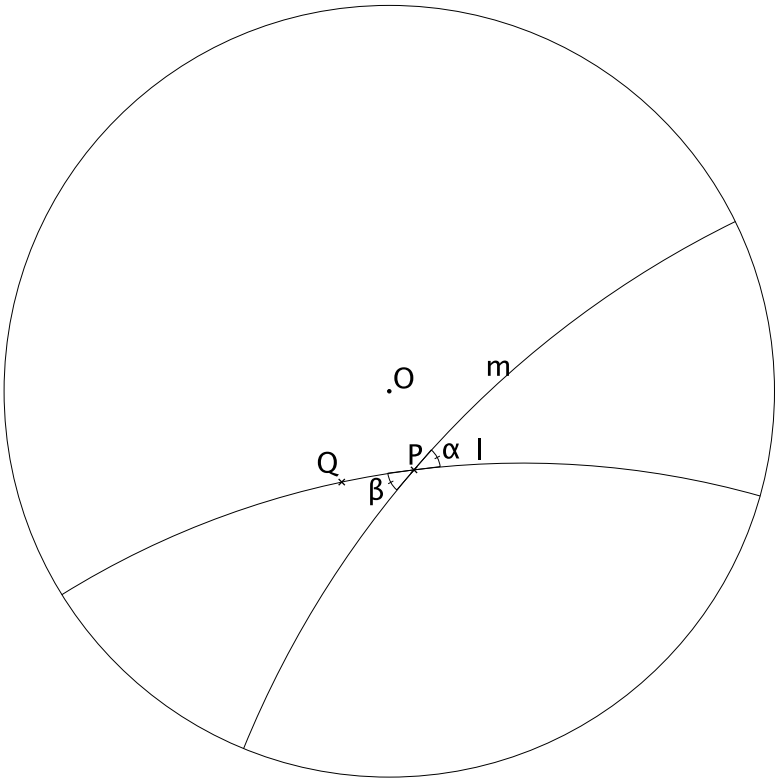


Figure 3.6 – Définitions dans le cercle de Poincaré

3.2.2 Concordance du modèle du cercle avec les quatre premiers postulats

Il peut sembler contre-intuitif que le cercle de Poincaré se rapporte à une géométrie toute entière. Tout d'abord on peut se dire qu'il s'agit d'une projection d'une hyperbole infinie sur un cercle (figure 3.7). Ensuite le cercle de Poincaré vérifie tous les postulats.

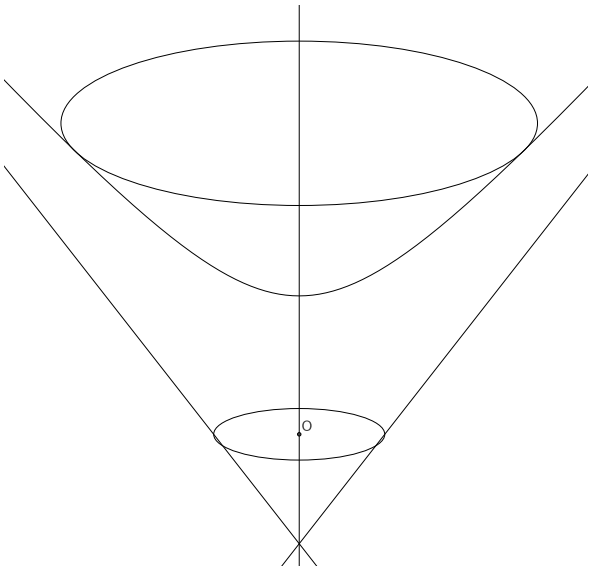


FIGURE 3.7 – Projection d'une hyperbole sur un cercle de Poincaré

Preuve de la concordance du modèle de Poincaré au premier postulat

Est-il vraiment possible de faire passer une seule droite hyperbolique par deux points dans le cercle de Poincaré ?
Pour cela considérons-le comme un objet euclidien. Prenons [8] un cercle c de centre O et de rayon unité. Deux points à l'intérieur A et B. Déterminons ce qu'il faut pour qu'un cercle orthogonal o de centre C passe par A. Appelons D et D', les points par lesquels il coupe c. On a ainsi un triangle rectangle CDO. Selon Pythagore on peut donc poser :

$$OC^2 = OD^2 + DC^2 \tag{3.23}$$

Maintenant nous voulons que o passe par A, donc nous allons poser $DC = AC$. Nous savons aussi que $OD = 1$. Plaçons cela dans 3.23 :

$$OC^2 = 1 + AC^2 \Longrightarrow OC^2 - AC^2 = 1 \tag{3.24}$$

Par identité remarquable :

$$OC^2 - AC^2 = 1 \Longrightarrow (CO - AC)(CO + AC) = 1 \tag{3.25}$$

En faisant du calcul vectoriel (I étant le milieu de AO) :

$$(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AC}) = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{AO} \cdot 2\overrightarrow{CI} \Longrightarrow \tag{3.26}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{IO}) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{OA^2}{2} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \tag{3.27}$$

8. [Bou05]

En projetant le vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur $\overrightarrow{OA}$ on obtient le vecteur $\overrightarrow{OC'}$ dont la longueur est définie par la relation :

$$\|\overrightarrow{OC'}\| = \frac{\|\overrightarrow{OA}\|}{2} + \frac{1}{2\|\overrightarrow{OA}\|} \tag{3.28}$$

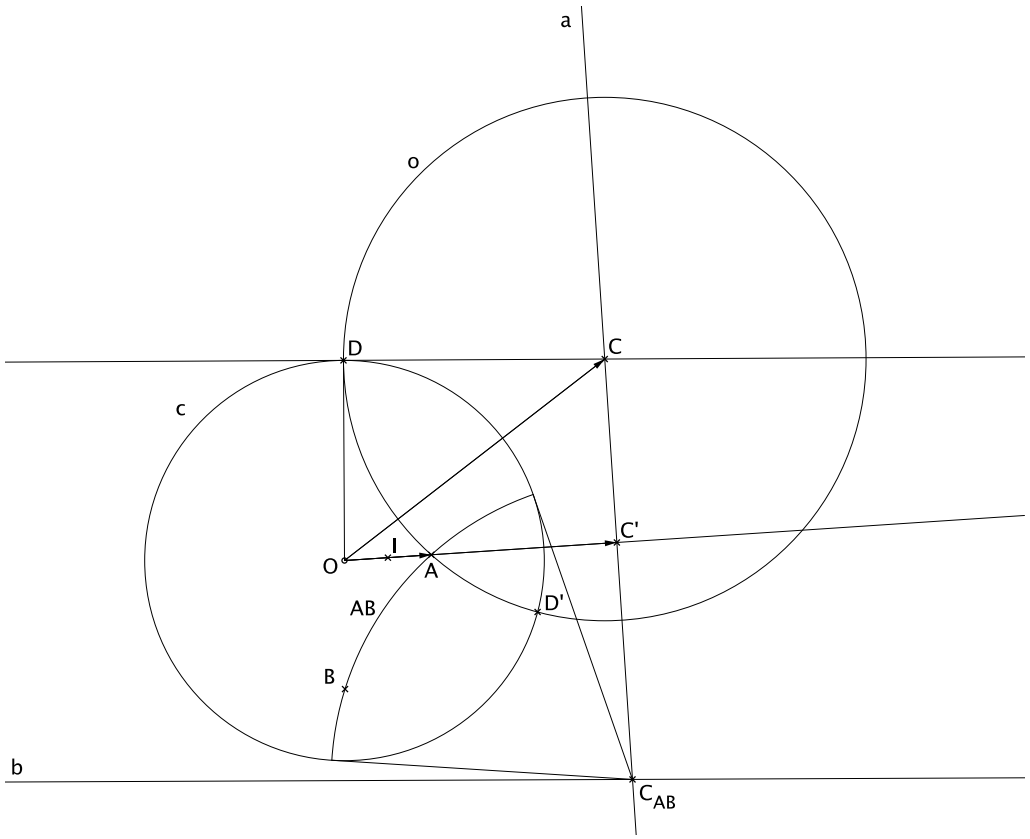


Figure 3.8 – Construction dans la preuve de la concordance du cercle de Poincaré avec le premier postulat

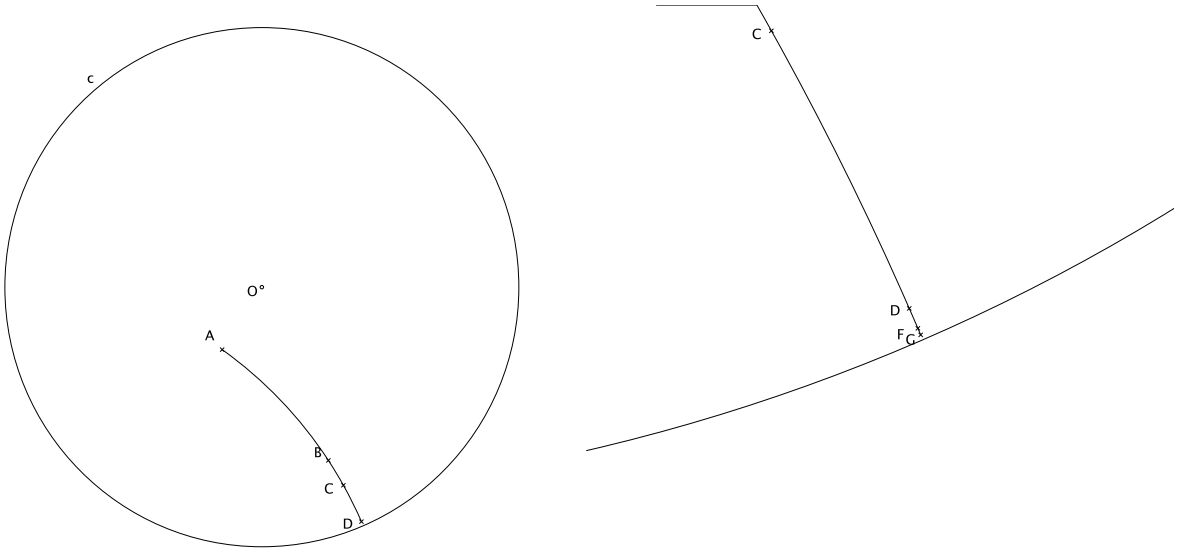
Autrement dit pour qu'un cercle o orthogonal à c passe par un point A donné, il faut que son centre soit situé sur la droite a qui est définie comme étant l'ensemble des points C, dont les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ ont une projection $\overrightarrow{OC'}$ sur $\overrightarrow{OA}$ définie par l'équation 3.28.
La droite b, équivalente de la droite a pour B, croise la droite a en un unique point C_{AB}, qui est le centre euclidien de l'unique droite hyperbolique $\overleftrightarrow{AB}$.

□

Concordance du cercle aux trois autres postulats

Les autres postulats me semblent assez simples pour que l'on ait pas besoin de démontrer leur concordance. Il est évident que les angles entres deux tangentes respectent le quatrième postulat, que les angles droits restent congruents. Ensuite pour le second postulat, celui du rallongement, en sachant que les distances s'étriquent infiniment, lorsque qu'on se rapproche du cercle-limite (fig. 3.9), on voit qu'il est toujours possible d'allonger une forme.

Il y aurait probablement d'avantage d'éléments à étudier dans la concordance du modèle de Poincaré avec le second postulat d'Euclide, celui du cercle.



(a) (b) zoom sur le schéma a

FIGURE 3.9 – Après avoir rallongé le segment AB jusqu'à D, on peut se dire que notre agrandissement est terminé... cependant, on n'atteint jamais réellement le cercle-limite...

3.2.3 Concordance du modèle de Poincaré avec les résultats axiomatiques de Lobachevsky

Maintenant que nous avons vu que le cercle de Poincaré permet bel et bien la représentation d'une géométrie homogène, nous allons nous demander, si il correspond bien aux résultats axiomatiques que nous avons démontré plus tôt. Pour cela, nous allons rapidement procéder par expérience. En effet, je pense qu'ici ce sera plus simple et parlant, que de tenter de longues preuves.

Le parallélisme limite

La principale caractéristique de la géométrie hyperbolique est évidement le postulat non-euclidien : *Par un point éxterieur à une droite passe une infini de droites parallèles*. Est-ce que cela se vérifie dans notre modèle ? Pour cela tentons la construction. Dessinons une droite d qui passe par le centre O du cercle limite, puis plaçons un point A juste au-dessus. Puis-je construire une infinité de droite parallèle à d ? Bien évidement puisque le lieu des centres euclidiens des droites passant par A est une droite c perpendiculaire à OA et situé à $\frac{OA}{2} + \frac{1}{2OA}$de O. Les points limites M et M' sont les points par lesquels d atteint le cercle limite. Le lieu de toutes les droites parallèles à d est donc un segment se situant entre C_M et C'_M qui sont chacun le centre euclidien des droites AM et AM', droites se situant à la limite du parallélisme.

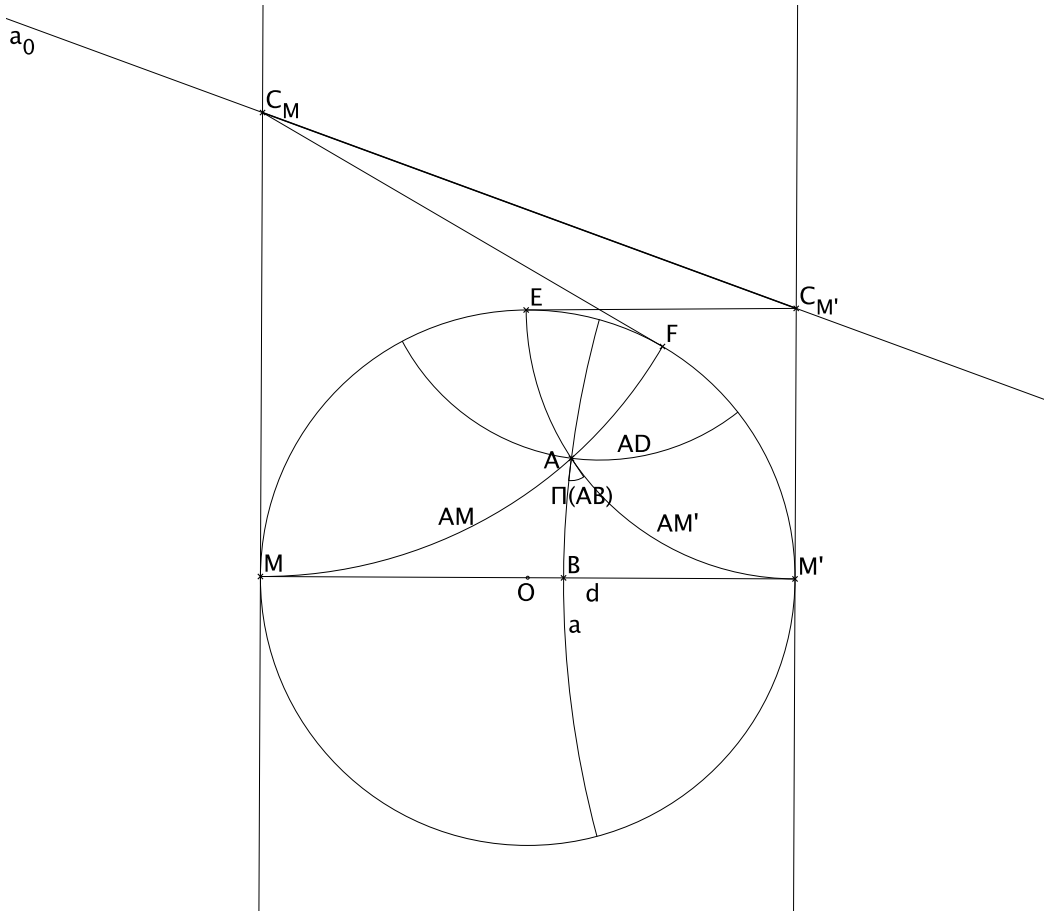


Figure 3.10 – Parallélisme limite dans un cercle de Poincaré

Si on fait passer une droite a, passant par A, perpendiculaire à d en B, si on construit maintenant aussi une droite AD perpendiculaire à a, l'angle $\widehat{BAM}$ est bien l'angle $\Pi(AB)$. Si on augmente la distance AB, Π diminue, inversement si AB diminue.
Dans le cadre du cercle, il faut remarquer que les distances n'ont pas les même propriétés que dans l'espace euclidien. Plus on s'approche du cercle limite plus un distance hyperbolique h sera représentée par un arc de cercle euclidien e petit. L'une des techniques pour mesurer les distance, est de faire la construction de l'angle limite pour une petite distance, et donc un angle faible. Je propose par exemple une distance dont l'angle Π sera égale à $\frac{1}{10}\pi$ radians. Ensuite pour mesurer une distance entre deux points, on peut reporter cette distance en la reconstruisant par son angle Π.

Les triangles et les autres polygones

D'abord est-ce que le modèle de Poincaré correspond à l'une des principales caractéristiques que nous avons donné à la géométrie hyperbolique : *la somme des angles d'un triangle est-elle inférieure à deux droits* ? Pour cela construisons un triangle dans le cercle et regardons ce qu'il se passe. Si des sommets de ce triangle nous tirons des segments euclidiens, nous remarquons que les angles du triangle euclidien ainsi construit contiennent les angles du triangle hyperbolique. Enfin, lorsqu'on dessine un triangle dont les sommets se trouvent pratiquement sur la limite (en effet, ils ne pourraient se situer SUR la limite, car dans ce cas, ce ne serait pas un triangle, mais des droites parallèles par triplet), on le construit avec des angles qui s'approchent de zéro.

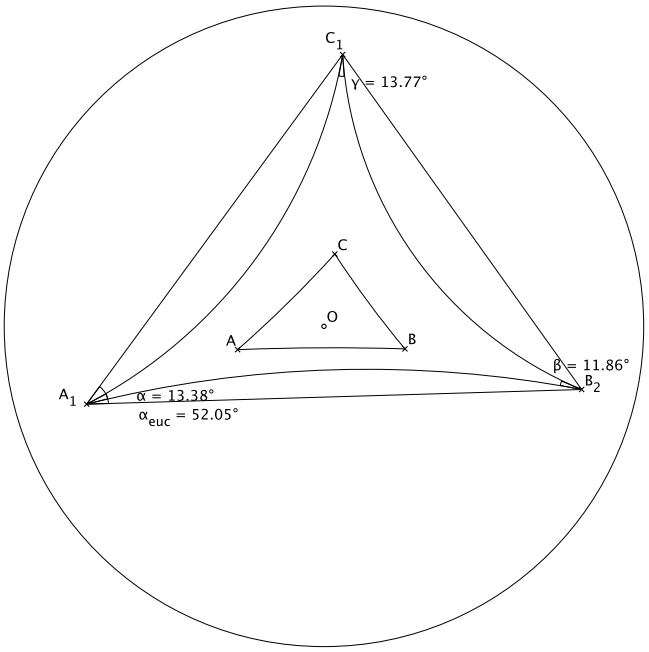


FIGURE 3.11 – Les triangles ont bien une somme d'angles inférieure à π.

Qu'est-ce-que nous pouvons conclure de cette petite expérience ? Eh bien, nous remarquons que plus un triangle est grand, plus ses angles sont petits. Cela nous met la puce à l'oreille : les angles des triangles sont liés à leur taille et non pas à leur proportion. Le modèle du

cercle vérifie donc probablement la congruence des triangles semblables. Pour vérifier cela, construisons l'équivalent de la figure 3.5 dans le cercle de Poincaré (fig. 3.12).

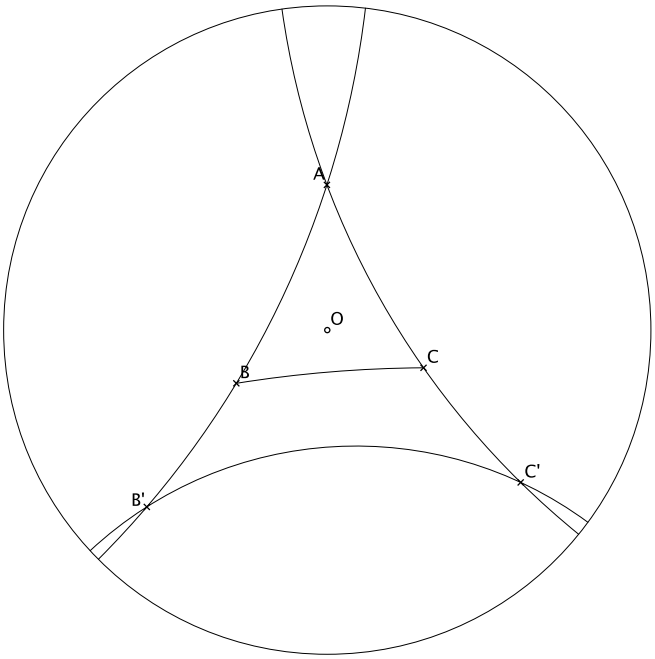


Figure 3.12 – Les angles en B' et C' sont plut petit qu'en B et en C

L'angle en *C'* est bien plus petit que l'angle en *C*. Nous avons donc bien à faire à deux triangles non semblables. Le seul moyen de construire un triangle semblable à un autre est d'avoir exactement les mêmes mesures.
Pour les autres polygones, la somme de leurs angles est toujours inférieure à celle de leurs équivalents euclidiens. Dans le cas des polygones réguliers, on peut donc modifier leurs angles à loisirs, selon leur taille, mais toujours inférieurs aux angles qu'ils auraient en géométrie euclidienne. On peut ainsi construire un hexagone régulier rectangle , ou encore un carré avec des angles de 10° (environ 0.17453 radians). S'il est possible de construire toute sortes de polygones réguliers, cela ne veut-il pas dire qu'il est possible de paver l'espace comme on le souhaite ? C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

3.3 Pavages Hyperboliques

Oui, en géométrie hyperbolique, il est possible de construire une infinité de pavages différents. Vu que les triangles n'ont pas forcément une somme d'angles identique, il est possible de construire des polygones réguliers avec des angles de toutes sortes, et donc de paver le plan avec eux.
Dans un plan euclidien, nous avons l'habitude de voir uniquement des triangles, des carrés ou des hexagones paver l'espace. En géométrie hyperbolique, sous certaines conditions, il est possible de le faire avec une infinité de formes. Cela est juste une question d'angle minimum et de nombre de pavés par sommets. Mais avant de nous pencher plus en détail sur ces règles, j'aimerais introduire un objet mathématique très important pour le modèle de Poincaré.

3.3.1 La symétrie dans le cercle de Poincaré : l'inversion

Pour faire une symétrie dans le cercle de Poincaré, nous devons utilisé ce qui est au cercle ce que la symétrie est à la droite : l'inversion.
L'inversion fonctionne de la façon suivante : Prenez le cercle c, de rayon r et de centre O, et un point A quelconque. A' sera l'image de l'inversion A par c s'il se situe sur la droite $\overleftrightarrow{OA}$ et si sa distance OA' est égale à l'inverse de la distance OA en prenant r comme unité. Autrement dit, si OA' est égale à :

$$OA' = r^2 * OA^{-1} \; ou \; OA' = \frac{r^2}{OA} \tag{3.29}$$

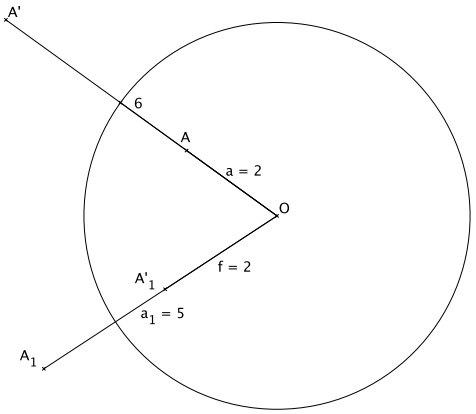


Figure 3.13 – Représentations d'inversions basiques ; le rayon du cercle vaut $\sqrt{12}$

Pour donner une image, on peut dire que l'inversion équivaut à retourner l'espace comme un gant ; les points se situant loin du cercle, se situeront proche du centre, et ceux se situant proche du centre seront éjectés au loin. Les points proches du cercle s'inversent simplement.

Quelques propriétés de l'inversion

Si on inverse une droite, elle se transforme en un cercle orthogonal au cercle de projection. Un cercle passant par le centre du cercle d'inversion se rapporte en une droite. Tout les

autres cercles sont projetés en cercle. Le centre du cercle inversé n'est pas l'inversion du cercle de départ. (fig. 3.14)

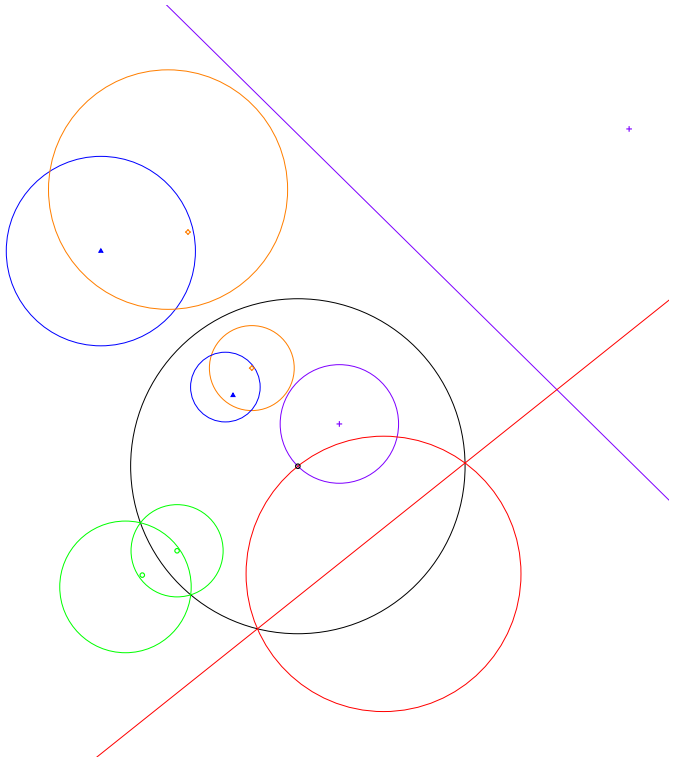
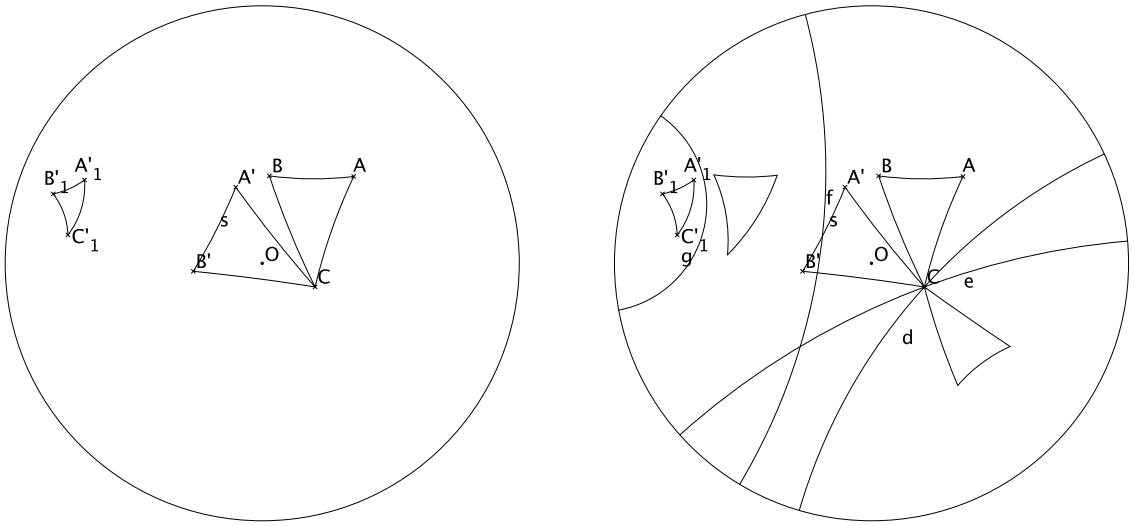


FIGURE 3.14 – Chaque paire d'objets de mêmes couleurs correspond à une inversion de l'un vers l'autre

Les transformations dans le cercle de Poincaré

Vu que les droites sont des arcs de cercles, nous pouvons opérer à des inversions dans le cercle de Poincaré, équivalent à la symétrie euclidienne. En géométrie euclidienne, toutes les transformations peuvent se faire en plusieurs symétries. Il en va de même en géométrie hyperbolique. (fig. 3.15)



(a) Rotation de centre c du triangle ABC sur $A'B'C$ et translation sur $A'_1B'_1C'_1$

(b) Détails de la construction

Figure 3.15 – Les translations et les rotations sont créées par double inversion. Pour faire la translation de ABC sur $A'_1B'_1C_1$, on a dû d'abord faire l'inversion par f puis par g. Pour une rotation, il faux que les droites de la double inversion ne soient pas parallèles, comme d et e.

3.3.2 Construction de pavages

Même si la géométrie hyperbolique permet de faire une infinité de pavages différents, il n'est par exemple pas possible de construire un pavage avec des carrés à angles droits, tous simplement parce que c'est impossible ! Cela est dû à la limite de la somme des angles. En effet, la sommes des angles d'un polygone hyperbolique à n côtés est définie par la relation [9] 3.30 :

$$S < (n-2)\pi \qquad n \in N \tag{3.30}$$

Les angles A des polygones réguliers sont définis par :

$$A < \frac{(n-2)\pi}{n} \tag{3.31}$$

Soit q le nombre entier de pavés autour d'une intersection, l'angle Q sera égal :

$$Q = \frac{2\pi}{q} \tag{3.32}$$

En combinant les deux inéquations :

$$\frac{2\pi}{q} < \frac{(n-2)\pi}{n} \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{q} < \frac{n\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} \Longrightarrow \frac{2}{q} + \frac{2}{n} < 1 \tag{3.33}$$

9. [Ley08]

Ainsi, pour déterminer le minimum q de pavés par intersections nécessaire pour pouvoir faire un pavage par un polygone régulier donné de n cotés, q doit satisfaire l'inéquation (3.34) :

$$q > \frac{2n}{n-2} \qquad (q;n) \in N^2 \tag{3.34}$$

Si on calcule le minimum pour les triangles, on obtient 7, pour les carrés, les pentagones et les hexagones, 4, et pour tout polygones avec d'avantage de côtés, 3.

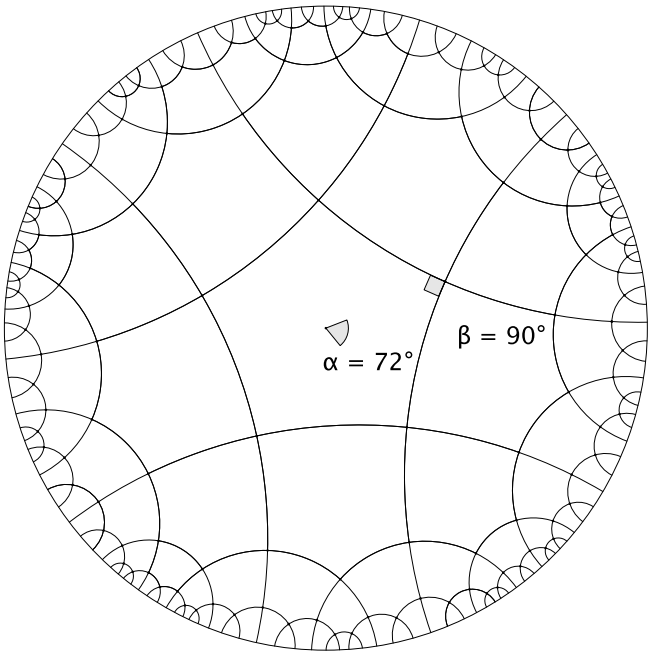


Figure 3.16 – Pavage avec des pentagones rectangles

4 Une souris dans un cercle de Poincaré

Nous avons survolé dans les grandes lignes la théorie, attaquons une petite application : imaginons qu'une souris soit coincée dans un cercle de Poincaré et doit y chercher son fromage. Simple me direz vous ? Il suffit de tirer une droite hyperbolique entre la souris et le fromage, et l'histoire est réglée ! Sauf que nous allons rajoutez des contraintes : un labyrinthe, et le fait que vous guidez la souris avec... votre souris !

Hyperbolic Games : un petit programme qui regroupe quelques jeux hyperboliques

En effet le jeu que je viens de vous décrire est tiré d'un petit programme "*Hyperbolic Games*"(vous pouvez le télécharger au moyen de ce lien : `http://www.geometrygames.org/HyperbolicGames/`)[1], qui regroupe quelques jeux hyperboliques. Il y a un billard, un sudoku et le jeu "*Maze*" qui est le jeu de la souris et du fromage.
Une fenêtre apparait avec, à droite un petit menu, et à gauche un "gazon" de Poincaré ; Il est divisé selon un pavage de triangles où autour de chaque point d'intersection il y a sept triangles.
Un dessin de ligne de bois limite par endroits les triangles entre eux : il composent le labyrinthe que nous allons devoir faire parcourir à notre *souris affamée*.
Cliquez sur le cercle...

4.1 ...Ça se complique...

Votre curseur se retrouve au centre du gazon. Vous le déplacez en avant ; le curseur commence à rapetisser. C'est l'effet de la contraction des distances causée par le modèle de Poincaré. Cependant, si vous continuez votre mouvement, le curseur réapparait quelque part sur les côtés.
Cela s'explique par le fait que les triangles au centre sont répétés infiniment. Si vous maintenez le clic de votre curseur enfoncé, vous faites glisser le terrain : en regardant attentivement, vous remarquez que *la souris* et le fromage se répètent indéfiniment, de plus en plus petits au fur à mesure qu'ils sont proches du bord.
Maintenant que nous nous somme habitués à cet espace étrange, passons au jeu en lui même. Pressez sur "escape" et re-cliquez pour que votre curseur revienne au centre.

1. [Wee13]

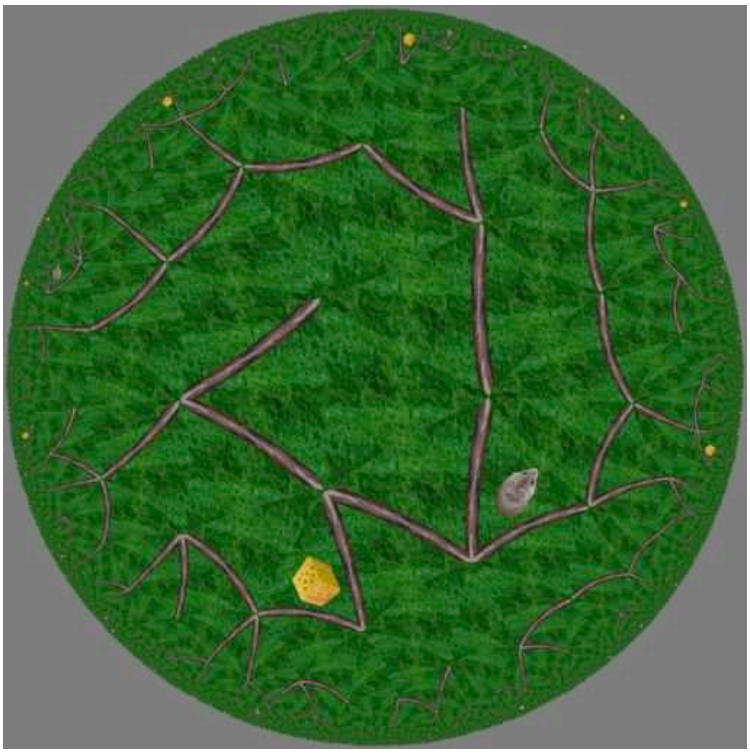


FIGURE 4.1 – Comment la *souris affamée* va-t-elle faire pour parvenir au fromage ?

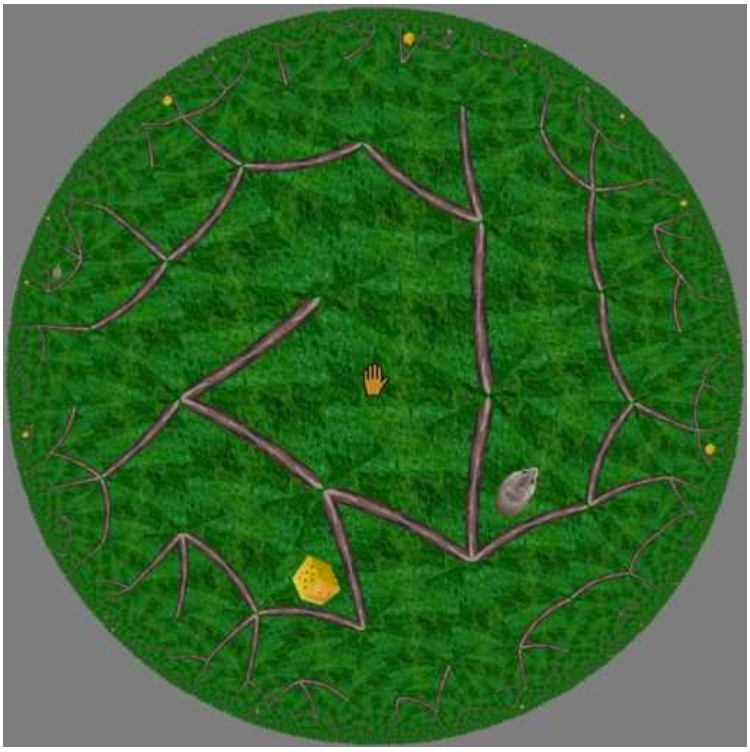


FIGURE 4.2 – "Bon, essayons. . . "

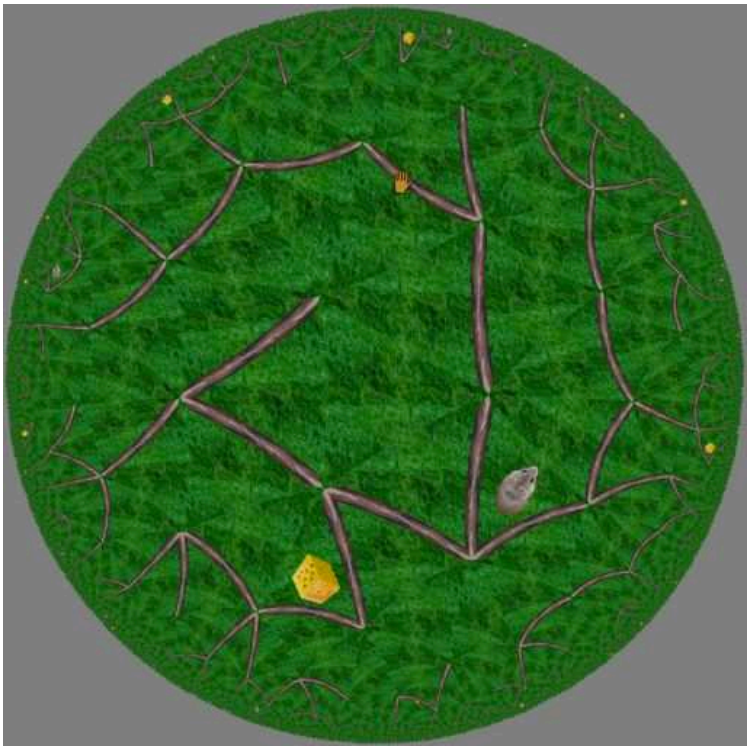


Figure 4.3 – "ça ne devrait pas être trop compliqué..."

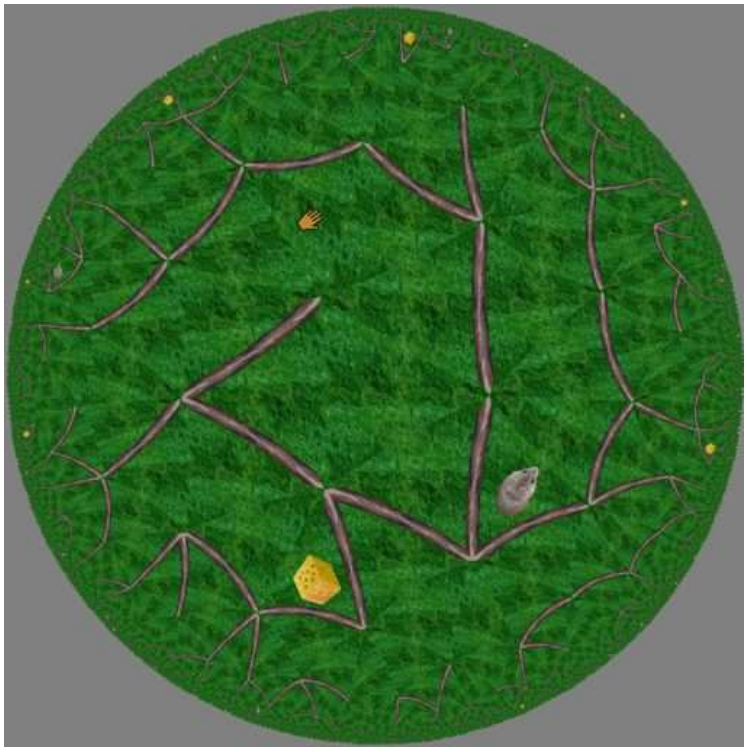
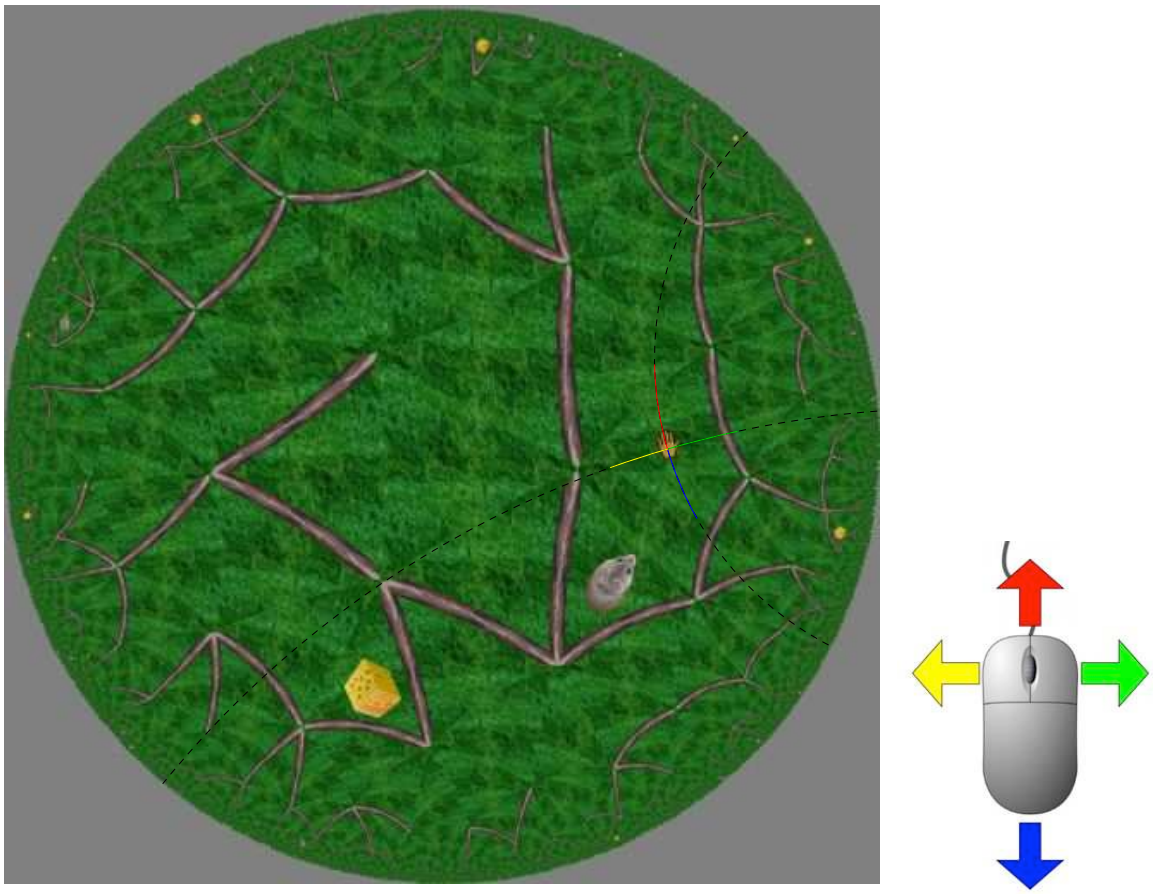


Figure 4.4 – "Je n'y comprends plus rien..."

Jouons maintenant !



(a) (b)

FIGURE 4.5 – Les mouvements de couleurs de la souris physique permet de déplacer le curseur selon les traitillés

Pour déplacer *la souris affamée*, maintenez votre clic enfoncé dessus, elle suivra votre curseur. Vous remarquerez cependant, qu'elle se déplace de façon étrange. Vous avez beau la tirer avec votre curseur, en allant tout droit, vous n'arrivez pas à la faire allez droit… Mais si, vous allez "droit" ! mais pas de la façon dont on l'entend habituellement, vous suivez des droites hyperboliques. Vos déplacements deviennent logiques : ils suivent les cercles orthogonaux du modèle de Poincaré !
Vous remarquerez que le plus dur pour déplacez votre *souris affamée*, c'est lorsqu'elle s'approche des bords et que le curseur en forme de main, en suivant les droites hyperboliques particulièrement incurvées, se retrouve "à l'envers". Pour vous aider, tournez votre souris d'ordinateur dans la même direction que le curseur sur l'écran : vous pourrez alors plus facilement déplacer *la souris affamée* et la diriger vers le fromage
En faisant *de la gymnastique de la souris*, en la pivotant dans tous les sens vous finissez par enfin arriver sur votre objectif : savourez frais avec un morceau de pain.

5 Conclusion

Cette étude de la géométrie hyperbolique nous a permis d'avoir un aperçu sur les mathématiques enrichissant. Nous voyons désormais que la géométrie hyperbolique, malgré ses idées de départ qui peuvent paraitre contradictoire, forme au final un ensemble cohérent.
Il est possible d'explorer un univers vraiment très vaste en mathématiques, une fois qu'on laisse tomber ses préjugés. Un pentagone rectangle est bien possible, les triangles n'ont pas forcément une somme d'angles de 180 degrés.
Lorsqu'on réfléchit un peu, nous nous rendons compte que ce que nous avons juste sous les yeux n'est pas l'unique possibilité que les mathématiques permettent. Je postule l'existence de géométries ou d'algèbres encore plus exotique que la géométrie hyperbolique.

5.1 Si nous allions plus loin.

La géométrie est un domaine véritablement vaste, cela n'excuse pas ma sous-exploitation. J'aurais pu étudier le demi-plan de Poincaré, le modèle du cercle de Klein, le modèle spatial sur une véritable hyperbole. J'aurais aussi pu détailler d'avantage les résultats algébriques en géométrie hyperbolique, tel que la trigonométrie, le calcul de surface ou simplement la mesure de distances.
Mon plus gros regret est de ne pas avoir eu le temps de créer le Go hyperbolique. J'aurais utilisé l'un des patterns de pavages pour le plateau. J'aurais étudié les principales séquences qui peuvent s'y produire ; je les auraient comparées avec les séquences du Go "euclidien".
J'aurais aussi voulu me pencher sur la géométrie dans l'espace. Voir un peu comment la géométrie hyperbolique affecte un espace en 3D. Et peut-être aussi, spéculer sur les conséquences pour un être humain d'être coincé dans un univers hyperbolique dont la "non-euclidiannité" (excusez-moi le néologisme) se ressentirait à échelle macroscopique.

5.2 Enrichissements promulgués par cette aventure

Le travail que j'ai fourni ici m'a permis de nombreuses remises en questions. J'ai eu parfois de grands moments de doutes ; souvent le travail n'allait pas au rythme que je souhaitais.
Cependant, en commençant par poser l'ébauche d'une problématique, puis en dessinant un plan (voir la figure en annexe : fig. A.1) et en faisant une planification graphique (fig. A.2), que je n'ai pas respectée à la lettre, mais qui m'as permis la structuration de mon travail, je

suis parvenu à surmonter toutes ces périodes creuses. Cette mise en œuvre a permis que ce travail soit structuré.
Ce travail de maturité fut une expérience enrichissante et la plus conséquente que je n'aie jamais entreprise. Malgré le non-aboutissement de certaines parties, je suis content d'avoir pu m'essayer à cette longue réflexion en mathématiques.
LaTeXétait au départ, très, voir trop compliqué à mes yeux, mais au final je pense avoir gagné un temps précieux. Je pense réutiliser cet outil à l'avenir. La facilité qu'il ma permis dans la mise en page était vraiment agréable. LaTeX a tout de même été assez capricieux : il m'a fallut du temps avant que la bibliographie ne fonctionne. Certains petits bogues m'ont par moment fait hurlé (le bogue du circonflexe : l'accent circonflexe ne voulait pas entrer). Malgré tout cela, LaTeX m'a été bénéfique.

Bibliographie

[Bou05] Charles Boubel. *conférence : Une promenade non-Eucldienne*. http ://www.ens-lyon.fr/asso/groupe-seminaires/seminaires/voirsem.php ?id=cboubel, 2005.

[Bro96] André Brouty. *Les géométries non-euclidiennes*. http ://www.brouty.fr/Maths/lobatchewski.html, 1996.

[Gau00] Karl Friedrich Gauss. *Correspondance de Gauss et Schumacher (Recherches géométriques sur la Théorie des parallèles), traduction de J. Houel*. Librairie Scientifique A. Hermann, 1900.

[Gre72] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. W.H. Freeman and company, 1972.

[Hoh13] Markus Hohenwarter. *GeoGebra*. http ://www.geogebra.org/cms/, 2013.

[Ley08] Jos Leys. *Une chambre hyperbolique*. http ://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique.html, 2008.

[Lob00] Nikolaï Ivanovitch Lobatschewsky. *Théorie des Parallèles (Recherches géométriques sur la Théorie des parallèles), traduction de J. Houel*. Librairie Scientifique A. Hermann, 1900.

[PM08] collaboration de Karine et Alain Pérez-Magen. *Manipulations élémentaires de géométrie non-euclidienne avec le logiciel CABRI*. Editions publibook Université, 2008.

[Voe05] Jean-Daniel Voelke. *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*. Peter Lang, 2005.

[Wee13] Jeff Weeks. *Hyperbolic Games*. http ://www.geometrygames.org/HyperbolicGames/, 2013.

Annexes

A

Annexe A : la première

Nombre de lignes de code dans latex : 1212

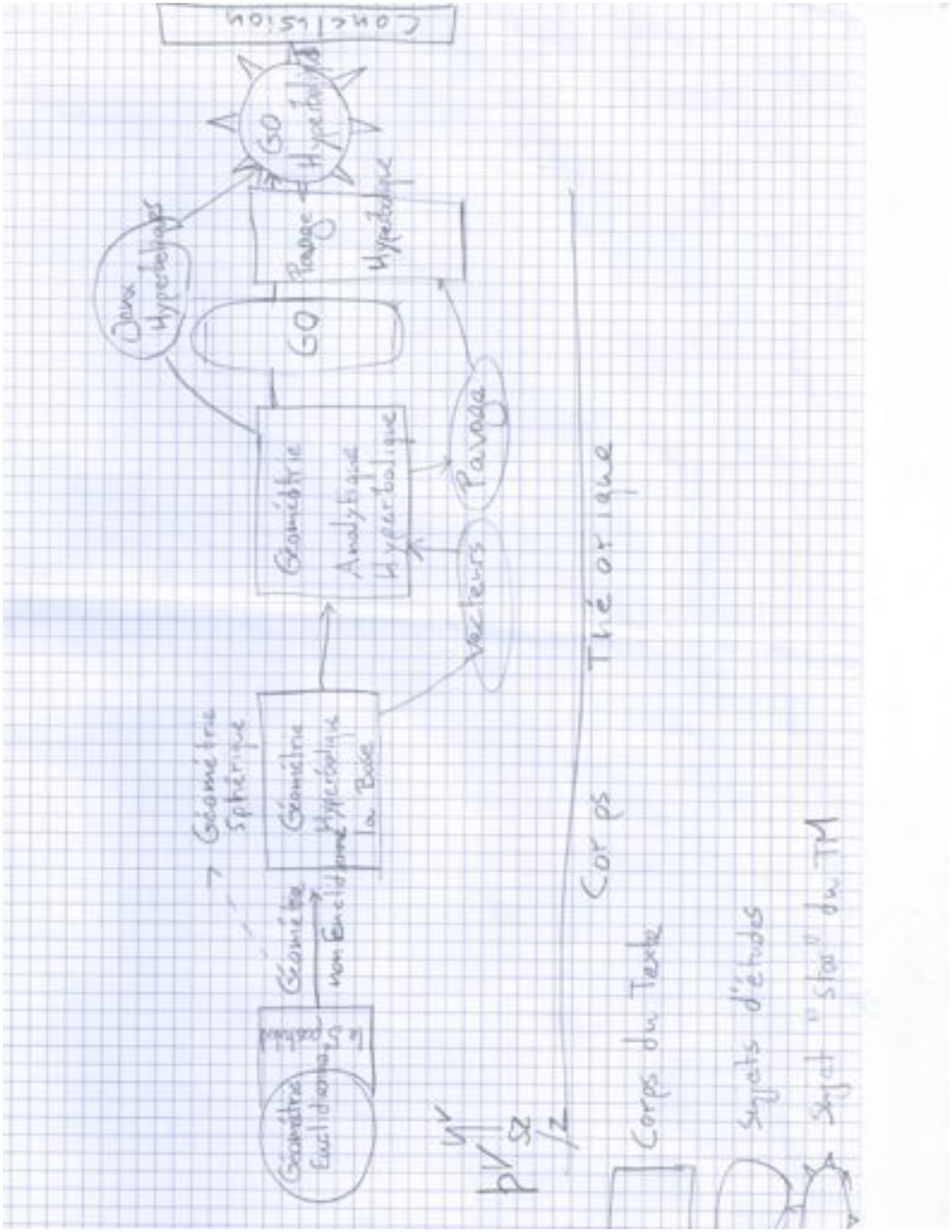


Figure A.1 – Plan utilisé dans l'ébauche de ce document

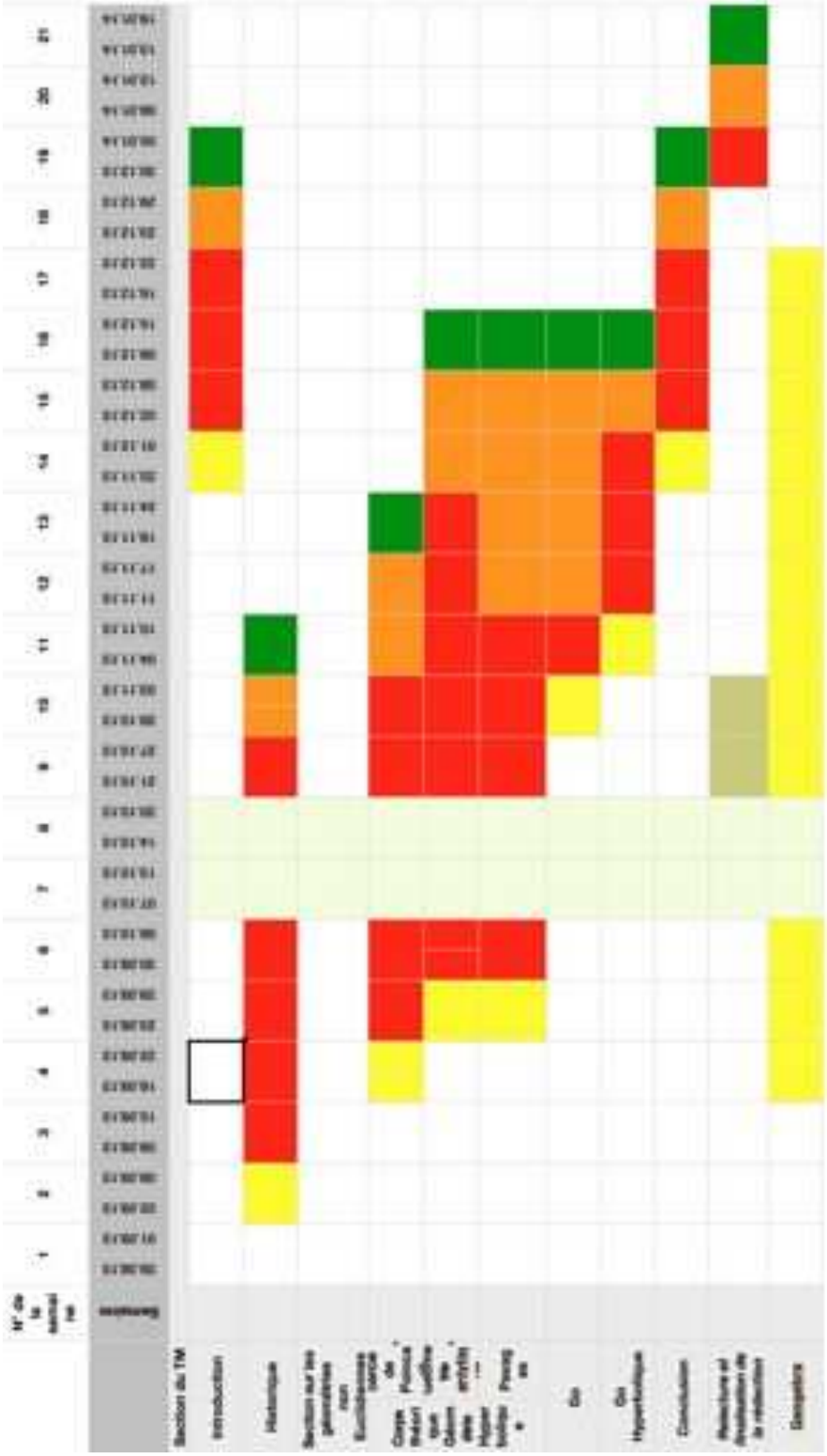


Figure A.2 – Planification graphique pour la rédaction de ce document